

Résolutions d'inéquations et études de signes

1 Résolutions d'inéquations

1.1 Solutions d'une inéquation

Remarque : L'ensemble des solutions d'une inéquation est en général un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} .

Exemple :

Les solutions de $2x - 6 > 3$ sont les nombres strictement supérieurs à 4, 5.
L'ensemble de ces solutions est donc l'intervalle $]4, 5; \infty[$.

Définition : Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

1.2 Résolution algébrique

1.2.1 Inéquations équivalentes

On raisonne comme pour les équations en passant d'une inéquation à une inéquation équivalente plus simple.

Propriété :

On transforme une inéquation en une équation inéquivalente :

- en développant ou en factorisant certains des termes (1) ;
- en ajoutant ou retranchant un **même terme** à chaque membre (2) ;
- en multipliant ou divisant chaque membre par un même nombre **non nul** (3).

Exemple :

Résoudre l'inéquation $2x - 5 \geq 6x + 7$

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -5 & \geq & 6x & +7 \\ & +5 & = & & +5 \\ 2x & & \geq & 6x & +12 \\ -6x & & & -6x & \\ -4x & & \geq & & 12 \\ x & & \leq & & -\frac{12}{4} = -3 \end{array}$$

A la dernière étape de la résolution on divise par -4 qui est négatif, donc l'inégalité change de sens.

$$S =] - \infty; -3]$$

1.2.2 Inégalités et variations de fonction

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et u et v deux nombres de cet intervalle tels que $u < v$:

- f est strictement croissante sur I équivaut à $f(u) < f(v)$
On dit que f conserve l'ordre.
- f est strictement décroissante sur I équivaut à $f(u) > f(v)$
On dit que f inverse l'ordre.

Application : Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x+2} < 4$ pour $x > 0$

Si $x > 0$ $x + 2 \neq 0$ donc $\frac{1}{x+2}$ est défini et positif.

La fonction inverse est une fonction strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc :

$$\frac{1}{x+2} < 4 \Leftrightarrow x+2 > \frac{1}{4}$$

Tous les nombres positifs vérifient cette condition, donc l'ensemble des solutions est $]0; +\infty[$

1.3 Résolution graphique

Similaire à la résolution d'équations