STS1 Probabilités

Généralités et probabilités conditionnelles

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
• Je connais les notations $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $\bar{A}$ et $p_A(B)$ • Je sais faire un arbre de probabilité dans les cas simple. • Je sais calculer une probabilité à partir d'un arbre. • Je sais justifier l'indépendance de deux évènements à partir d'un texte ou de probabilités.	• Je sais construire un arbre de probabilité dans des cas plus complexe. • Je sais construire ou utiliser un tableau de probabilités. • Je sais écrire les formules correspondantes à un calcul de probabilités. • Je sais justifier l'indépendance de deux évènements en utilisant les formules mathématiques.	• Je sais « retourner » un arbre de probabilité. • Je sais utiliser les formules des probabilités conditionnelles, de l'intersection et des probabilités totales.

A. Généralités

1. Le langage des probabilités : épreuve, issues, univers, événement

L'ensemble **Ω** de tous les résultats possibles s'appelle **l'univers** des issues. On dit aussi que **Ω est l'ensemble de tous les cas possibles.**

Un **évènement A** est un sous-ensemble de **Ω.**

L'évènement $A \cap B$ se produit quand l'évènement A et l'évènement B se produisent.
L'évènement $A \cup B$ se produit quand l'évènement A ou l'évènement B se produit.

2. Notion d'équiprobabilité.

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3. Evénement impossible et événement certain.

Un événement qui ne peut se réaliser est appelé **événement impossible** ; sa probabilité est égale à 0. On le note $\emptyset$

Un événement qui est sûr d'être réalisé est appelé **l'événement certain.** Sa probabilité est 1.

4. Evénement contraire

L'événement $\overline{A}$ contraire d'un événement A est l'événement réalisé quand A n'est pas réalisé.

D'un point de vue ensembliste, l'événement $\overline{A}$ est la partie de **Ω** qui contient les issues qui ne sont pas dans A.

Connaissant la probabilité d'un événement A, on obtient facilement la probabilité de l'événement contraire :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

5. Evénements incompatibles

2 événements A et B sont incompatibles lorsque A et B ne se produisent jamais en même temps.
Pour deux événements A et B incompatibles, on a donc $p(A \cap B) = 0$

6. Réunion de deux événements

Pour tous événements A et B, on a : $p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cas particulier : quand A et B sont incompatibles, on a : $p(A \cup B) = P(A) + P(B)$

7. Résumé des propriétés des probabilités

1) $0 \leq p(A) \leq 1$ (une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1)
2) p(∅) = 0
3) p(Ω) = 1
4) p($\overline{A}$) = 1 – p(A), pour tout événement A de Ω
5) $p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$pour tous événements A et B de Ω
6) $p(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous événements A et B incompatibles

B. Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

Une probabilité conditionnelle est une probabilité sous condition ; la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que A est réalisé par exemple.

1. La formule des probabilités conditionnelles

Lorsque la probabilité d'un événement A est non nulle, la probabilité conditionnelle de B sachant A est :

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

2. La formule de l'intersection

Lorsque la probabilité d'un événement A est non nulle, la probabilité de l'intersection B 3 A est :

$$p(B \cap A) = p_A(B) \times p(A)$$

Remarquez aussi que rien n'empêche d'intervertir les rôles de A et B, et puisque les événements $B \cap A$ et $A \cap B$ sont le même événement, on obtient :

$$p(B \cap A) = p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

3. Formule des probabilités totales

Etant donnés deux événements A et B :

$$\boldsymbol{p(A) = p(B \cap A) + p(\overline{B} \cap A)}$$

4. La notion d'indépendance de deux événements

Concrétement deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.

Les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

1) **les événements A et B sont indépendants**
2) $\boldsymbol{p(B) = p_A(B) = p_{\overline{A}}(B)}$
3) $\boldsymbol{p(B \cap A) = p(B) \times p(A)}$

5. Utilisation d'un arbre de probabilité :

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.
La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B.
La machine M_A fournit 40 % de la production et M_B le reste.
La machine M_A fournit 2% de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3% de médailles défectueuses.
On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les évènements suivants :

- A: « la médaille provient de la machine M_A»;
- B: « la médaille provient de la machine M_B»;
- D: « la médaille est défectueuse »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Les évènements « la médaille provient de la machine M_A » et « la médaille est défectueuse » sont-ils indépendants ?

3. Quelle est la valeur de $P_B(D)$? De quelle probabilité s'agit-il ?

4. Montrer que la probabilité que la médaille soit défectueuse est égale à 0,026

5. Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine A sachant qu'elle est défectueuse.

6. Compléter au maximum l'arbre suivant :