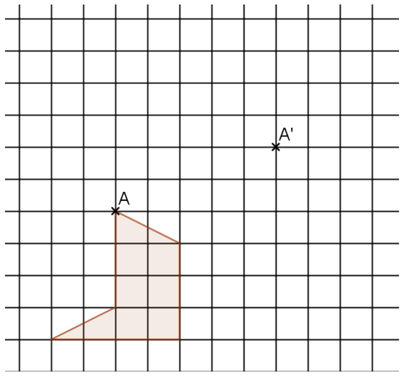
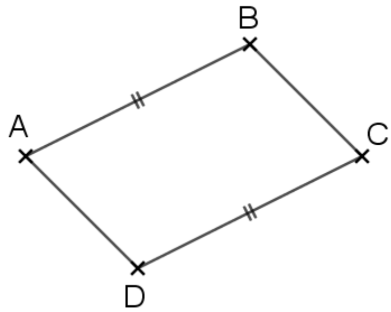
# Vecteurs

## 1 Rappel sur les translations




Définition :
La translation qui transforme A en A' est le déplacement qui se fait :

- dans la direction de la droite (AA')
- suivant le sens de A à A'
- de la longueur AA'




Propriété : (admise) C est l'image de D par la translation qui transforme A en B si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Propriété : Dans ce cas, on a :

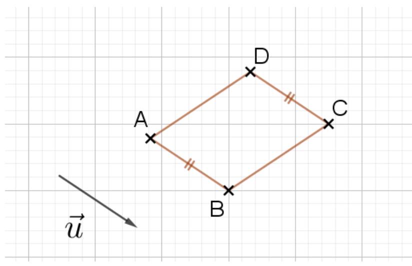
- (AB) et (DC) sont parallèles,
- AB = DC

## 2 Vecteurs

Propriété-définition :

A toute translation, on peut associer un objet mathématique appelé **vecteur**.

Un vecteur **agit** sur l'ensemble des points par la translation associée.




Dans l'exemple ci-contre :

B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$
C est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$

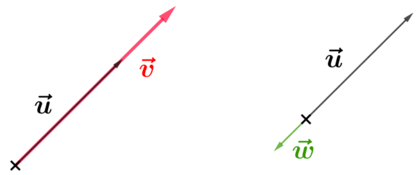
Propriété : (admise) Un vecteur est caractérisé par :
- sa direction
- son sens
- sa longueur appelée **norme** du vecteur.

Notation On note $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont colinéaires.

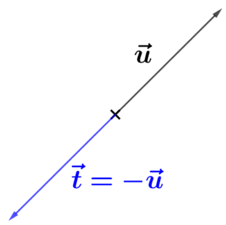
Dans l'exemple ci-contre :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ils ont le même sens.
$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires mais ils n'ont pas le même sens.




Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, un sens différent et la même norme, on dit qu'ils sont opposés.

Dans l'exemple ci-contre : $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont opposés.




Notation : On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

Remarque :
Si la translation de vecteur $\vec{u}$ envoie le point A sur le point B, alors la translation de vecteur opposé $-\vec{u}$ envoie B sur A.

# 3 Vecteurs et coordonnées

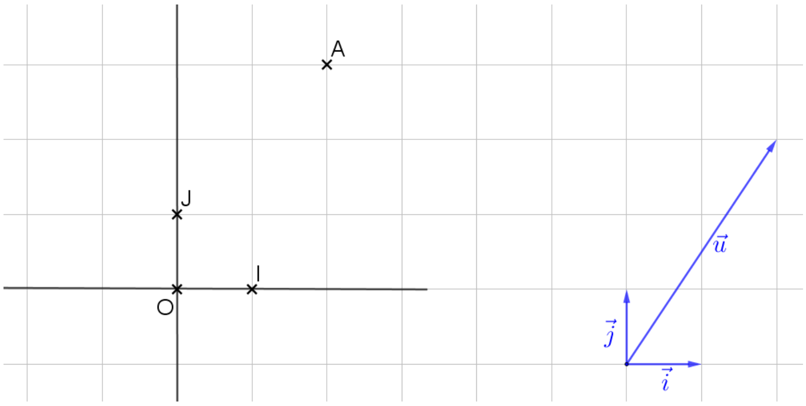
Dans toute cette section le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

Définition - Propriété :(admise) Soient $\vec{i}$ le vecteur de la translation qui envoie O sur I et $\vec{j}$ le vecteur de la translation qui envoie O sur J, $(\vec{i};\vec{j})$ est **la base associée** au repère (O,I,J).

Définition : Soit A un point du plan de coordonnées $(x_A;y_A)$, soit $\vec{u}$ de la translation qui transforme O en A, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ sont $x_A$ et $y_A$.
On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Exemple :

$A(2;3)$ et $\vec{u}$ est le vecteur de la translation qui transforme O en A.
donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$




Propriété : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

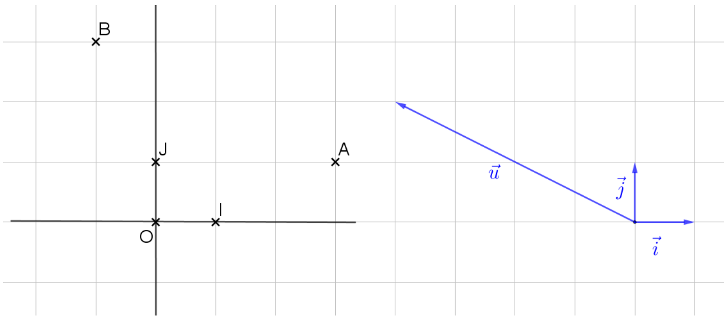
Propriété (admise) : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, les coordonnées du vecteur de la translation qui transforme $A$ et $B$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple :

$A(3;1)$ et $B(-1;3)$,

le vecteur $\vec{u}$ de la translation qui transforme A en B a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$




Définition : Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'appelle le vecteur nul. On le note $\vec{0}$.

Propriété : L'image d'un point $A$ par la translation de vecteur nul est $A$ lui-même.

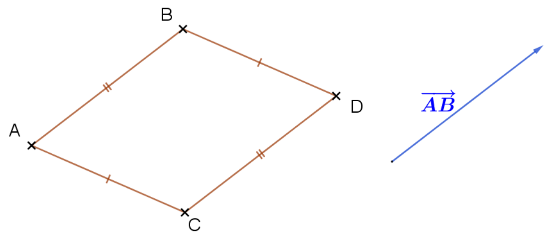
## 4 Notation des vecteurs à l'aide des points - vecteurs égaux

Notation : On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur de la translation qui envoie A sur B.

Remarque : $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur de la translation qui envoie B sur A, donc $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Exemple : Le vecteur de la translation qui envoie A sur B est $\overrightarrow{AB}$.
$ABDC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}$ est aussi le vecteur de la translation qui envoie C sur D.




Convention :
On écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux.**

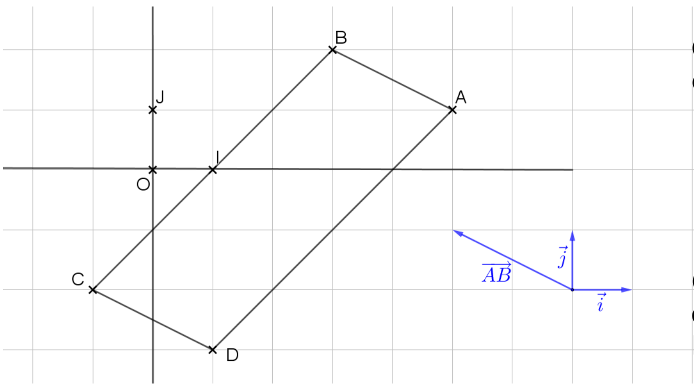
Propriété 1 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Propriété 2 : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Application : Démontrer que un quadrilatère est un parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , on considère les points A(5 ; 1), B(3 ; 2), C(-1 ; -2) et D(1 ;-3).
Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

---




On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

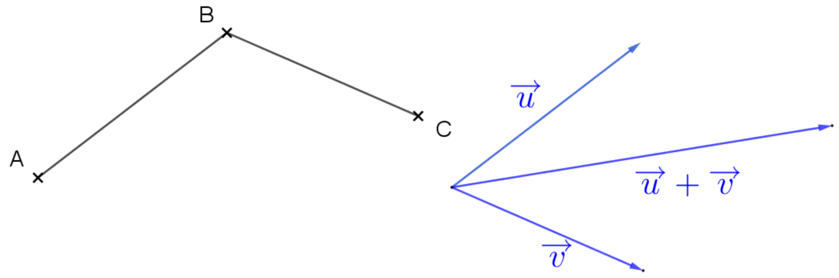
$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Donc ABCD est un parallélogramme.

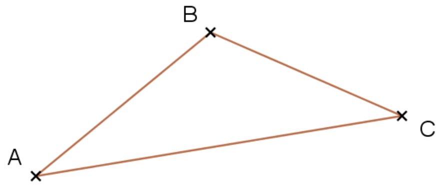
# 5 Somme de deux vecteurs

Propriété : (admise) Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation qui envoie A sur B et $\vec{v}$ est le vecteur de la translation qui envoie B sur C, alors $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de la translation qui envoie A sur C.



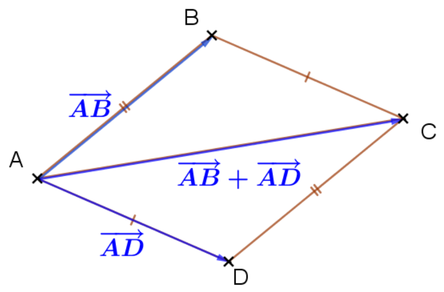

Propriété : Relation de Chasles
Soient A, B, C trois points du plan,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$




Propriété : Soit ABCD un parallélogramme

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$




## Soustraction

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

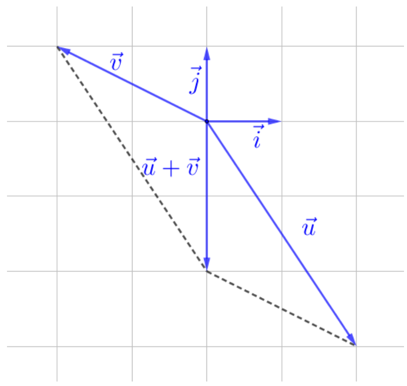
Propriété : $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

## Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Propriété (admise) : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

Application : Le plan vectoriel est muni d'une base $(\vec{i};\vec{j})$

Soients $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Calculer les coordonnés de $\vec{u}+\vec{v}$




---

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+(-2) \\ -3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$