Loi de probabilité à densité

1 Du discret au continu

Jusqu'à présent les variables aléatoires étudiées ne prenaient d'un nombre fini de valeurs. On pouvait dont donner leur loi sous la forme d'un tableau de valeurs.
Mais certains phénomènes aléatoires doivent être modélisés par des variables prenant toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. L'utilisation du tableau de valeur n'est plus possible, on doit utiliser des fonctions de densité.

Définition : On appelle **fonction de densité** sur un intervalle $[a, b]$ toute fonction f **continue et positive** sur $[a, b]$ telle que l'intégrale sur $[a, b]$ de cette fonction est égale à 1.

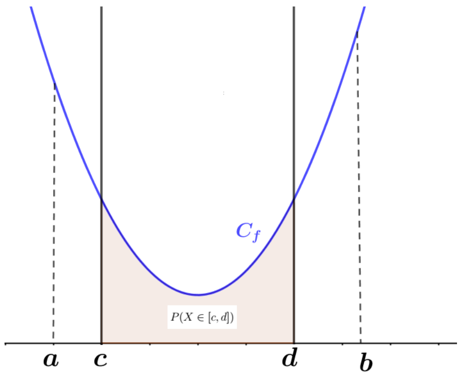
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Autrement dit, une fonction de densité est une fonction continue, positive sur un intervalle, dont l'aire totale sous la courbe est égale à 1.

Densité de probabilité

Lorsqu'une variable aléatoire X prend toutes les valeurs d'un intervalle I, sa loi de probabilité dite continue, est caractérisée par une fonction de densité.
Pour tout intervalle $[c, d]$ inclus dans I,

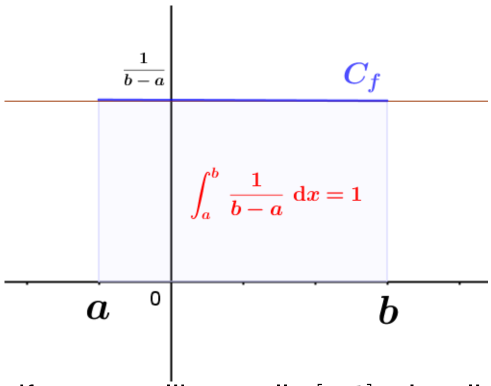
$$P(X \in [c, d]) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$



2 Loi uniforme

Contexte : Lorsque les probabilités sont "également réparties" entre toutes les valeurs, on parle dans le cas discret d'équiprobabilité", dans le cas continu, la loi de probabilité est une loi uniforme.

Définition : la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$



Propriété : Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'espérance de X est $\dfrac{a+b}{2}$

Interprétation : Cette espérance est une valeur approchée de la valeur moyenne observée quand on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Remarque : Pour pouvoir utiliser cette valeur approchée, il faut être en mesure d'encadrer l'écart entre la valeur exacte et cette valeur approchée.

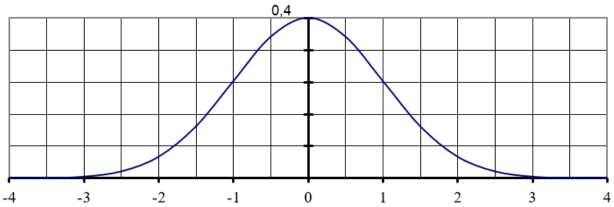
3 Loi normale centrée, réduite

Définition :
Une variation aléatoire X suit une **loi normale** $\mathcal{N}(0,\ 1)$ si sa fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ est :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\dfrac{-x^2}{2}}$$

Propriété :(admise) Si une variable aléatoire suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$, alors son espérance est 0 et son écart-type 1.

Représentation graphique de la fonction ϕ

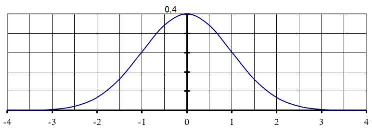


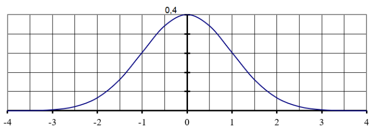
Propriétés :(admises)

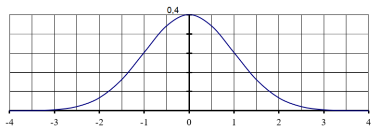
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'aire du domaine situé sous la courbe est égale à 1.

Remarque :La courbe semble toucher l'axe des abscisses pour x plus grand que 3 ou plus petit que -3, ce n'est pas le cas, l'écart entre l'axe et la courbe est de plus en plus faible, mais il existe toujours.

Propriétés :







Résultats particuliers :