Primitives et intégrales

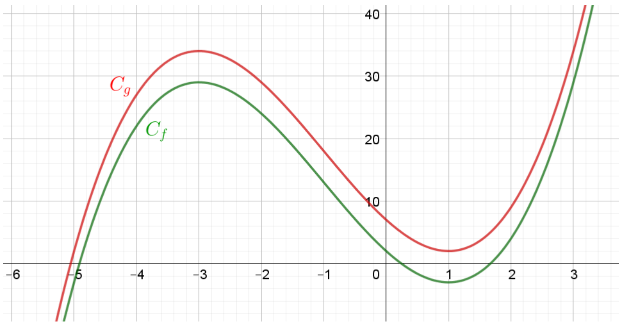
1 Primitives d'une fonction continue :

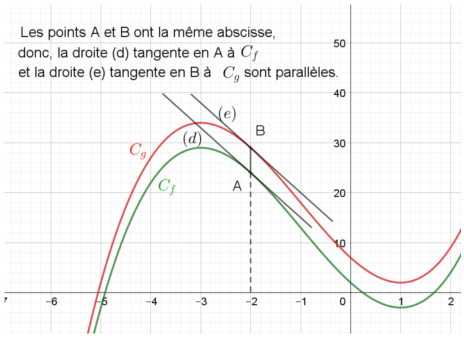
1.1 Remarques sur les fonctions dérivées :

Remarque : Deux fonctions peuvent avoir la même dérivée, elles ont alors les mêmes variations.

Exemple : Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$
- $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$

ont la même dérivée définie par $f'(x) = g'(x) = 3x^2 + 6x - 9$





Les fonctions f et g ont les mêmes variations :
- elles sont croissantes sur les mêmes intervalles,
- elles sont décroissantes sur les mêmes intervalles,
- et si un point de C_f et un point de C_g ont la même abcisse alors les tangentes en ces points sont parallèles.

Propriété 1 (admise) : Deux fonctions qui ont la même dérivée sont égales à une constante près.

Exemple : Pour les fonctions f et g définies plus haut, pour tout x : $g(x) = f(x) + 5$

1.2 Primitives d'une fonction continue :

1.2.1 Définition :

Définition : Soit f une fonction, on appelle **primitive de** f une fonction dont la dérivée est f.

Exemple :Les fonctions f et g définies dans la section précédente sont deux primitives de la fonction définie par $x \mapsto 3x^2 + 6x - 9$

Notation : On a l'habitude de noter F une primitive de f.

Théorème (admis) : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Grand malheur : Certaines fonctions continues n'ont pas de primitives calculables explicitement.

Exemple : On ne peut pas trouver de formule explicite donnant la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$

Grand bonheur : Toutes les fonctions continues des exercices de TES ont des primitives calculables explicitement.

1.2.2 Calcul de primitives :

Propriété 2 :(conséquence de la propriété 1)

Soit f une fonction,si F est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c est une constante quelconque.

Méthode : En terminale ES, on détermine les primitives d'une fonction continue par lecture inverse du tableau des dérivées.

- Exemple : Déterminer les primitives de f définie par $f(x) = 3x^2$

  Extrait du tableau des dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
x^3	$3x^2$

  Les primitives de f sont de la forme $x^3 + c$ où c est une constante.

- Exemple : Déterminer les primitives de f définie par $f(x) = 5x$

  Extrait du tableau des dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
x^2	$2x$
ax^2 où $a \in \mathbb{R}$	$a \times 2x$

  Les primitives de f sont de la forme $ax^2 + c$ où c est une constante.

  Il s'agit de déterminer a, on a $a \times 2 = 5$, donc $a = \dfrac{5}{2}$

  Les primitives de f sont de la forme $\dfrac{5}{2}x^2 + c$ où c est une constante.

Propriété 3 (admise) : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$,

si F et G sont deux primitives respectivement de f et de g,alors $F + G$ est une primitive de $f + g$

Propriété 4 (admise) : Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et a un nombre réel,

si F une primitive de f alors $a \times F$ est une primitive de $a \times f$.

- Exemple de calcul : Déterminer les primitives de f définie par $f(x) = 5x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$

  Extrait du tableau des dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
ax où $a \in \mathbb{R}$	a
ax^3 où $a \in \mathbb{R}$	$a \times 3x^2$

  Calcul d'une primitive de $5x^2$
  On utilise la deuxième ligne du tableau :
  Une primitive de $5x^2$ est ax^3 avec $a \times 3 = 5$ donc $a = \dfrac{5}{3}$.

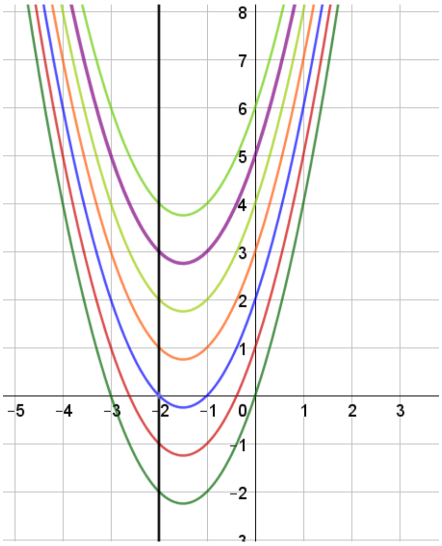
  Donc une primitive de $5x^2$ est $\dfrac{5}{3}x^3$

  Calcul d'une primitive de -3
  On utilise la première ligne du tableau :
  Une primitive de -3 est $-3x$

  Donc **les** primitives de f sont de la forme $\dfrac{5}{3}x^3 - 3x + c$ où c est une constante.

1.2.3 Calcul d'une primitive particulière :

Nous avons vu que **les** primitives d'une fonction sont toutes égales à une constante près.
Par exemple les primitives de la fonction définie par $f(x) = 2x+3$ sont toutes de la forme $F(x) = x^2+3x+c$ où $c \in \mathbb{R}$. Voici les représentations graphiques de quelques unes de ces fonctions :



Pour trouver **une** primitive en particulier, il faut donner l'image d'un nombre.
Cherchons ici **la** primitive de f telle que $F(-2) = 3$
$F(x) = x^2 + 3x + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
donc $F(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) + c = 4 - 6 + c = -2 + c$
donc on doit avoir $-2 + c = 3$ donc $c = 5$
La primitive de f telle que $F(-2) = 3$ est donnée par l'expression $F(x) = x^2 + 3x + 5$.

Interprétation graphique : Le point de coordonnées (-2 ; 3) appartient à la courbe violette, donc cette courbe est la représentation graphique de **la** primitive recherchée.

Propriété 4 : Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et x_0 et y_0 deux nombres réels,
il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

2 Intégrales d'une fonction continue :

2.1 Définition :

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f, on appelle **intégrale de f sur** $[a, b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation : On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'intégrale de f sur $[a, b]$.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$.

Définition : a et b sont appelées **les bornes** de l'intégrale.

Remarque : la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est impressionnante mais elle ne mord pas, rappelez vous que ce n'est que $F(b) - F(a)$.

Remarque : Dans la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la variable x est dite muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

2.2 Calcul d'intégrales :

Méthode

- On cherche une primitive de la fonction à intégrer (dont on veut calculer une intégrale)
- On calcule les valeurs de cette primitive aux bornes de l'intégrale.
- On calcule la différence entre ces deux valeurs.

Exemple : Calculer $\int_2^5 (x+3)\,\mathrm{d}x$

- La fonction à intégrer est $f(x) = x + 3$, on cherche une primitive de cette fonction :

  Extrait du tableau des dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
ax où $a \in \mathbb{R}$	a
ax^2 où $a \in \mathbb{R}$	$a \times 2x$

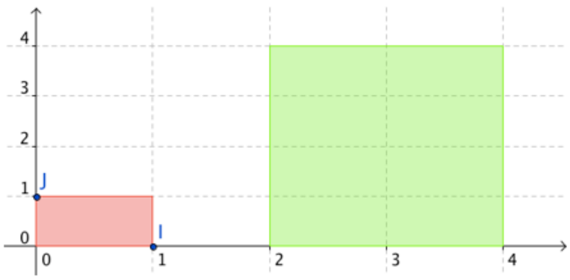
  Calcul d'une primitive de x :
  On utilise la deuxième ligne du tableau :
  Une primitive de x est ax^2 avec $a \times 2 = 1$ donc $a = \frac{1}{2}$.
  Donc une primitive de x est $\frac{1}{2}x^2$
  Calcul d'une primitive de $+3$:
  On utilise la première ligne du tableau :
  Une primitive de $+3$ est $3x$
  Donc **une** primitive de f est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$.
- On calcule les valeurs de cette primitive aux bornes de l'intégrale :
  $F(5) = \frac{1}{2} \times 5^2 + 3 \times 5 = \frac{25}{2} + 15 = 12,5 + 15 = 27,5$
  $F(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 = \frac{4}{2} + 10 = 2 + 6 = 8$
- On calcule la différence entre ces deux valeurs : $F(5) - F(2) = 27,5 - 8 = 19,5$

donc

$$\int_2^5 (x+3)\,\mathrm{d}x = 19,5$$

2.3 Cas d'une fonction positive, lien avec les aires :

Unité d'aire :



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

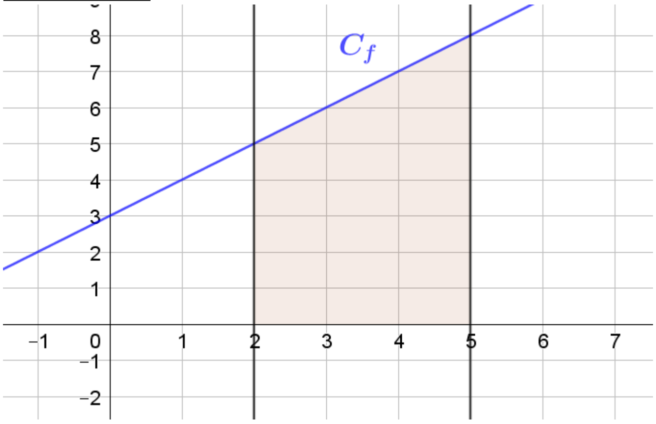
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge, elle est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (cm² par ex).

Propriété : (admise) Si f est une fonction continue et **positive** sur $[a,b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère (O,I,J)
alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine compris entre :
- l'axe des abscisses
- la droite d'équation $x = a$
- la droite d'équation $x = b$
- la courbe C_f

Cette aire est mesurée dans l'unité d'aire associée au repère (O,I,J).

Exemple :



Sur $[2;5]$, $x+3>0$.
Nous avons vu plus haut qu'une primitive de $f(x) = x+3$ est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$, et que $\int_2^5 (x+3)\,\mathrm{d}x = 19,5$

Donc $19,5$ est l'aire en unité d'aire du domaine coloré ci-contre.

2.4 Propriétés des intégrales d'une fonction continue et positive :

Propriété : Si f est une fonction continue et **positive** sur $[a,b]$ alors $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et elle a pour dérivée la fonction f.

Démonstration : Soit F une primitive de f on a : $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$
donc la dérivée de $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ est $F'(x) - F'(a) = f(x) - 0 = f(x)$ car F est une primitive de f et $F(a)$ est constante.

Propriétés :(admises) Si f et g sont deux fonctions continues et **positives** sur $[a,b]$,

- alors $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x > 0$
- Si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^x k \times f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x$

Propriétés de linéarité :(admises) Si f et g sont deux fonctions continues et **positives** sur $[a,b]$, si k est un réel positif, alors

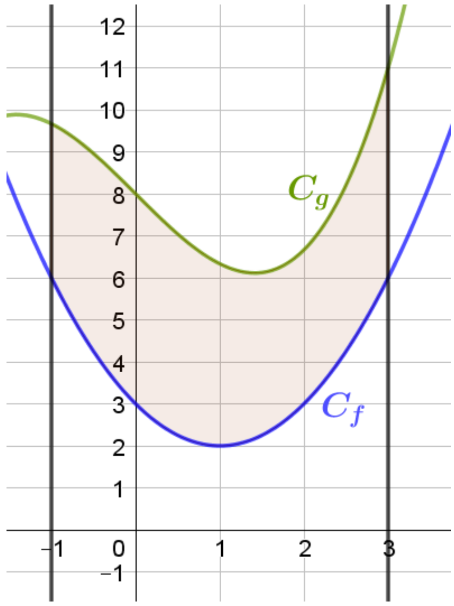
- $\int_a^x (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^x k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$

2.5 Aire entre deux courbes

Du paragraphe qui précède, on en déduit la propriété suivante :
Propriété : Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur un intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$. L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par :

- la droite d'équation $x = a$
- la droite d'équation $x = b$
- la courbe représentative de f
- la courbe représentative de g

est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

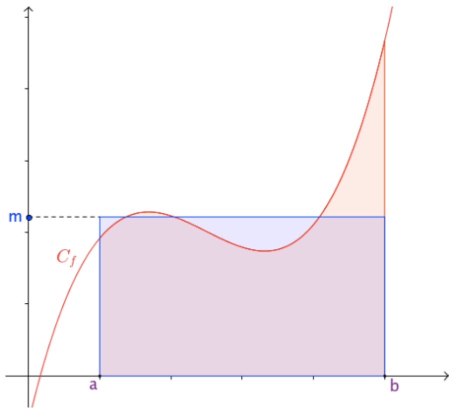


3 Moyenne d'une fonction continue

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation géométrique : si f est de plus une fonction positive, si m est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ alors,
sur $[a, b]$, l'aire sous la courbe représentative de f est égale à l'aire du rectangle de hauteur m.



Exemple : Calculer la valeur moyenne sur $[0; 10]$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

- On calcule une primitive de f :
  $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ convient.
- On calcule $\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = F(10) - F(0) = 10^3 - 2 \times 10^2 + 50 - 0 = 1000 - 200 + 50 = 850$
- On divise par $10 - 0 = 10$:
  $850 \div 10 = 85$

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est 85.