Correction exercice 54 page 256 :

a)

- On est bien dans une situation où on peut calculer des intervalles de fluctuations car :
  On connaît une proportion dans la population générale : les souris d'une race donnée
    - 18 % des souris ont des tumeurs
      donc $\boldsymbol{p = 18\% = 0,18}$

  On a pris deux échantillons de cette population :

    - Dans le test A : 100 souris donc $\boldsymbol{n = 100}$
    - Dans le test B : 400 souris donc $\boldsymbol{n = 400}$

- On vérifie les critères de validité de l'intervalle pour le test A (l'échantillon le plus petit, ils seront automatiquement vérifiés pour un échantillon plus grand.)
    - $\boldsymbol{n \geq 30}$ C'est vrai $n = 100$
    - $\boldsymbol{np \geq 5}$ C'est vrai $np = 100 \times 0{,}18 = 18$
    - $\boldsymbol{n(1-p) \geq 5}$ C'est vrai $np = 400 \times 0{,}82 = 82$

- On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour l'échantillon de la taille du test A :

$$1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{100}} \simeq 0{,}0753$$

  Donc $I_{100} \simeq [0{,}18 - 0{,}0753; 0{,}18 + 0{,}0753] \simeq [0{,}104;\ 0{,}256]$

- On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour l'échantillon de la taille du test B:

$$1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{400}} \simeq 0{,}0377$$

  Donc $I_{400} \simeq [0{,}18 - 0{,}0377; 0{,}18 + 0{,}0377] \simeq [0{,}142;\ 0{,}218]$

b) Fréquence de tumeurs dans l'échantillon du test A : $\frac{25}{100} = 0{,}25$
0,25 est dans l'intervalle de fluctuation donc cet échantillon peut être conforme à la répartition des souris présentant une tumeur.
Fréquence de tumeurs dans l'échantillon du test B : $\frac{56}{400} = 0{,}14$
0,14 n'est pas dans l'intervalle $[0{,}142;\ 0{,}218]$ donc au risque de se tromper de 5%, on peut dire que l'échantillon n'est pas conforme à la répartition des souris présentant une tumeur dans la population générale.

Remarque : la taille de l'échantillon du test A est trop petit, l'intervalle de fluctuation est grand et le simple fait de la fluctuation d'échantillonnage peut masqué l'efficacité du médicament. Pour un échantillon de taille supérieure, la fréquence observée est plus basse que la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation, donc au risque de se tromper de 5%, on peut dire que le médicament a eu un effet car le taux de souris présentant des tumeurs dans la population doit être maintenant plus faible que 18%.

Pour vérifier on réunit les deux échantillons :
La fréquence de tumeurs dans l'échantillon est maintenant : $\frac{25+56}{100+400} = \frac{81}{500} = 0{,}162$
L'intervalle de fluctuation pour un échantillon de 500 est :

$$1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{500}} \simeq 0{,}01718$$

Donc $I_{500} \simeq [0{,}18 - 0{,}01718; 0{,}18 + 0{,}01718] \simeq [0{,}1628;\ 0{,}1972]$

0,162 est inférieur à la borne inférieure de cet intervalle, donc au risque de se tromper de 5% on peut dire que le médicament a eu un effet.