

Correction exercice 20 page 244 :

- a) On est bien dans une situation où on peut calculer un intervalle de fluctuation car :
- On connaît une proportion dans la population générale, la population française.
- 47 % de ces français sont couverts par une prestation de la CAF, donc $p = 47\% = 0,47$

On a pris un échantillon de cette population (population française)

- Les 20 000 habitants de la ville donc $n = 20\,000$

On vérifie les critères de validités de l'intervalle (donnés dans un encart bleu sur la page 236)

- $n \geq 30$ C'est vrai $n = 20\,000$ L'échantillon n'est pas trop petit.
- $np \geq 5$ C'est vrai $np = 20\,000 \times 0,47 = 9\,400$ L'évènement «est allocataire de la CAF » n'est pas trop rare, au regard de la taille de l'échantillon.
- $n(1-p) \geq 5$ C'est vrai $n(1-p) = 20\,000 \times 0,53 = 10\,600$ L'évènement « est allocataire de la CAF » n'est pas trop fréquent.

On calcule l'intervalle de fluctuation:

$$1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1,96 \times \frac{\sqrt{0,47 \times 0,53}}{\sqrt{20\,000}} \approx 0,06917$$

$$\text{Donc } I_{20\,000} \approx [0,47 - 0,06917 ; 0,47 + 0,06917] \approx [0,4631 ; 0,4769] \approx [0,463 ; 0,477]$$

Attention à l'approximation de l'intervalle, il ne faut pas réduire la largeur, donc on arrondit systématiquement la borne inférieure par défaut : $0,4631 > 0,463$ et la borne supérieure par excès : $0,4769 < 0,477$ donc l'intervalle donné est un peu plus large que l'intervalle calculé.

2) a) La précision correspond à la largeur de l'intervalle de fluctuation asymptotique, or cette largeur est $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \times 2$ comme $p = 0,47$ on en déduit $f(n) = \frac{\sqrt{0,47 \times 0,53}}{\sqrt{n}} \times 2$.

b) $f(n) = 0,01$ donc $\frac{\sqrt{0,47 \times 0,53}}{\sqrt{n}} \times 2 = 0,01$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{0,01}{2 \times \sqrt{0,47 \times 0,53}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times \sqrt{0,47 \times 0,53}}{0,01}$$

$$n = \frac{4 \times 0,47 \times 0,53}{0,01^2} = 9964$$

On tombe sur un nombre entier, si cela n'avait pas été le cas il aurait fallu prendre le nombre entier immédiatement supérieur à la valeur trouvée.

Pour obtenir la proportion d'allocataires à 1% près, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% doit être de largeur 1%, pour cela il faut interroger 9964 personnes, concrètement 10 000 personnes soit la moitié de la population de la ville (20 000 personnes).