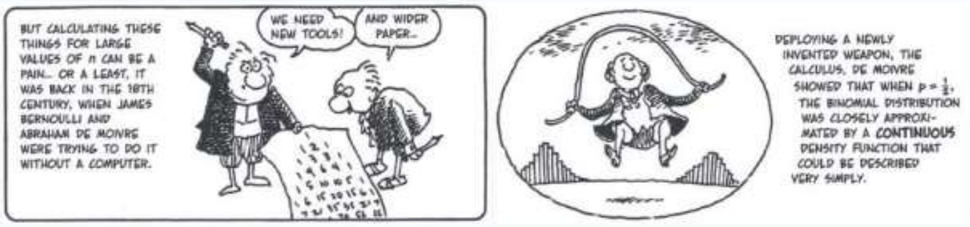
# 4 Vers la loi normale centrée et réduite

Au XVII[e] siècle, Jacques Bernoulli et Abraham De Moivre cherchent à calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale.

Celles-ci sont définies par la formule $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et les coefficients $\binom{n}{k}$ (lire « $k$ parmi $n$ ») sont difficiles à calculer notamment en l'absence d'ordinateurs (!).




*Source* : Larry Gonick, Woollcott Smith – *The cartoon guide to statistics.*

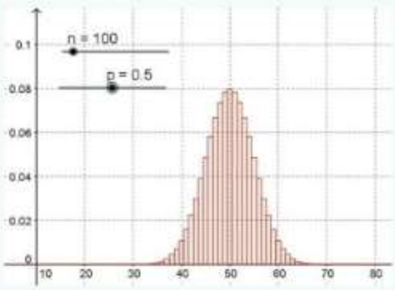
De Moivre propose alors une approximation de la loi binomiale dans le cas $p=\frac{1}{2}$ à l'aide d'une loi de probabilité à densité.

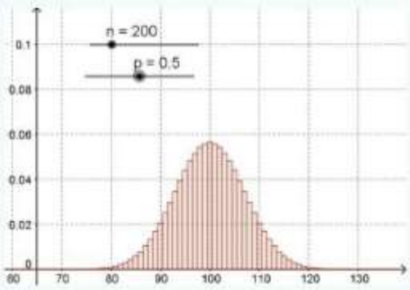
Essayons de comprendre graphiquement cette approximation.

Pour cela on considère une variable aléatoire $X_n$ suivant la loi binomiale de paramètre $n$ et $p=\frac{1}{2}$.

**1.** On a représenté ci-dessous la loi de $X_n$ par un histogramme d'aire totale égale à 1, dans les cas $n=100$ et $n=200$.

Quelles caractéristiques communes présentent les diagrammes de $X_n$ lorsque $n$ devient grand ?




**2.** Pour mesurer la dispersion de la loi de $X_n$, on définit le nombre $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$, appelé écart-type de la variable aléatoire.

**a.** En utilisant un logiciel ou une calculatrice, compléter le tableau ci-dessous.
On donnera des valeurs approchées au centième.

| $n$ | $m=n\times p$ | $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ | $m-\sigma$ | $m+\sigma$ | $P(X_n\in[m-\sigma\,;m+\sigma])$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | | | | |
| 100 | | | | | |
| 200 | | | | | |
| 1 000 | | | | | |

**b.** Que peut-on dire de la probabilité que la variable $X_n$ s'écarte de moins d'un écart-type de son espérance ?