Résolutions d'équations

1 Vocabulaire

Définition : Une solution d'une équation est une valeur que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.

Exemple : 3 est solution de l'équation $3x - 2 = -2x + 13$ car :

- $3 \times 3 - 2 = 9 - 2 = 7$
- $-2 \times 3 + 13 = -6 + 13 = 7$

donc $3 \times 3 - 2 = -2 \times 3 + 13$

Définition :Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

2 Résolution algébrique

Deux équations sont dites **équivalentes** quand elles ont les mêmes solutions. Résoudre l'une revient donc à résoudre l'autre.

$4x + 2 = x - 4$ et $3x = -6$ sont équivalentes car elles ont la même solution -2.

Propriété :

On transforme une équation en une équation équivalente :

- en développant ou en factorisant certains des termes (1) ;
- en ajoutant ou retranchant un **même terme** à chaque membre (2) ;
- en multipliant ou divisant chaque membre par un même nombre **non nul** (3).

Exemple :

Résoudre l'équation $2x - 5 = 6x + 7$

$$\begin{array}{cccccc}
2x & -5 & = & 6x & & +7 \\
 & +5 & = & & & +5 \\
2x & & = & 6x & & +12 \\
-6x & & & -6x & & \\
-4x & & = & & & 12 \\
x & & = & & & -\dfrac{12}{4} = -3
\end{array}$$

$2x - 5 = 6x + 7$ et $x = -3$ sont équivalentes, donc elles ont les mêmes solutions.

donc -3 est la solution de $2x - 5 = 6x + 7$

Certaines équations ne peuvent pas être résolues avec une méthode algébrique.

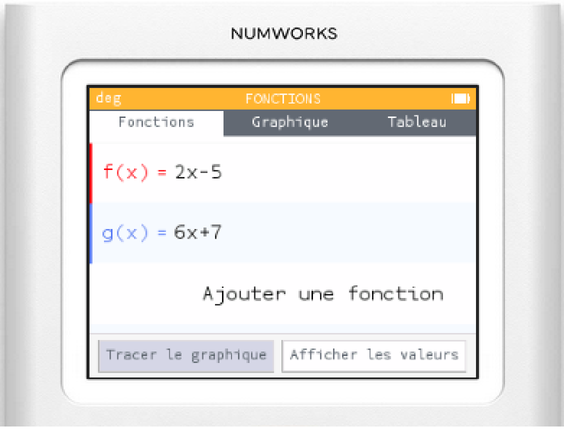
3 Résolution graphique

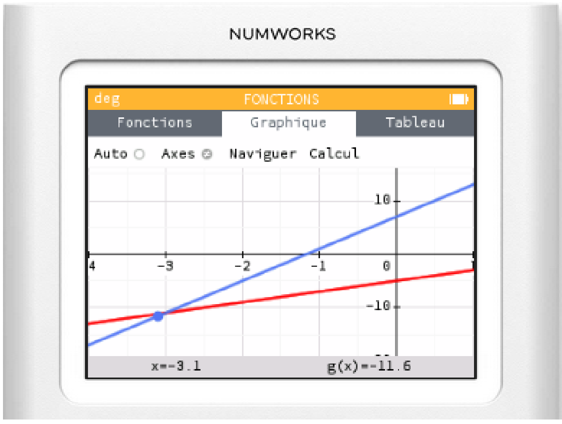
La résolution graphique d'une équation est rapide, mais elle ne donne qu'un résultat approché. La lecture de la solution est limitée par la précision du graphique.
Attention dans les exemples présentés, les fonctions sont affines, il n'y a qu'une seule solution à l'équation.

3.1 Résolution d'une équation du type $f(x) = g(x)$

Exemple : Résoudre l'équation $2x - 5 = 6x + 7$

On considère les deux fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = 6x + 7$ et on trace leur représentation graphique.





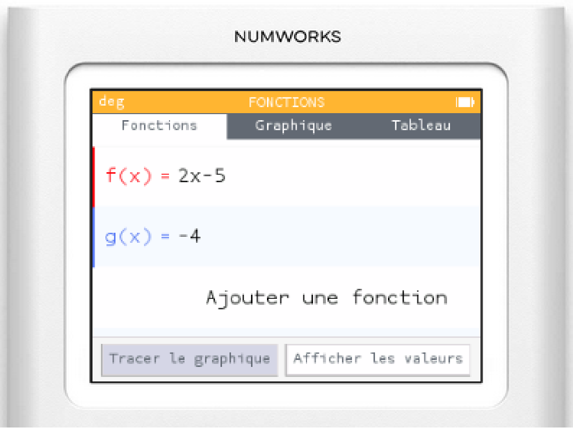
On voit sur le graphique que $f(x) = g(x)$ pour $x \simeq -3$

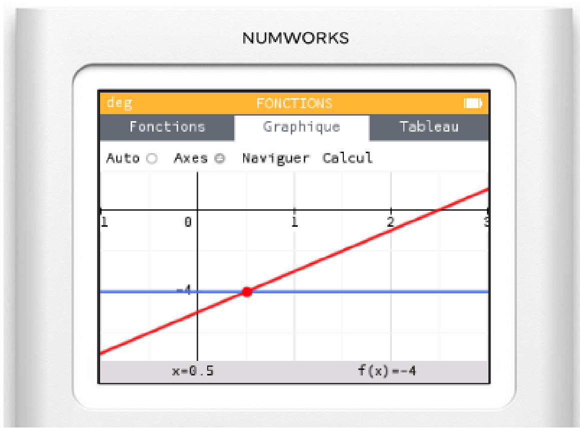
Donc la solution de l'équation $2x - 5 = 6x + 7$ est environ -3.

3.2 Résolution d'une équation du type $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemple : Résoudre l'équation $2x - 5 = -4$

On considère les deux fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = -4$ et on trace leur représentation graphique.





On voit sur le graphique que $f(x) = g(x)$ pour $x \simeq 0,5$

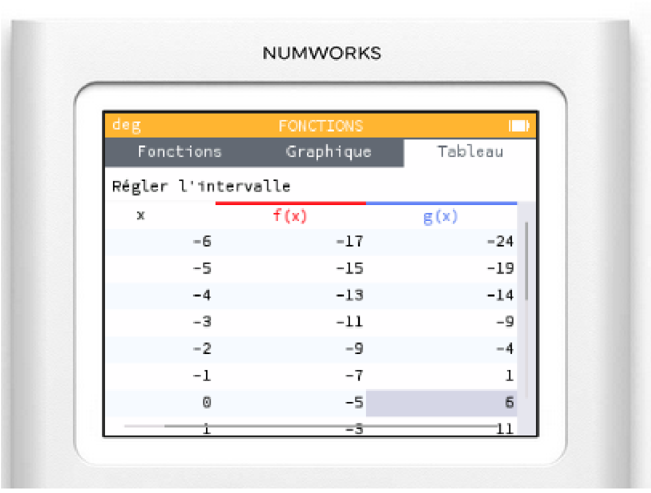
Donc la solution de l'équation $2x - 5 = -4$ est environ $0,5$.

4 Résoudre à l'aide d'un tableau de valeurs

Là aussi la résolution de l'équation n'est qu'approchée. De plus pour utiliser cette méthode, il vaut mieux connaître un ordre de grandeur des solutions.

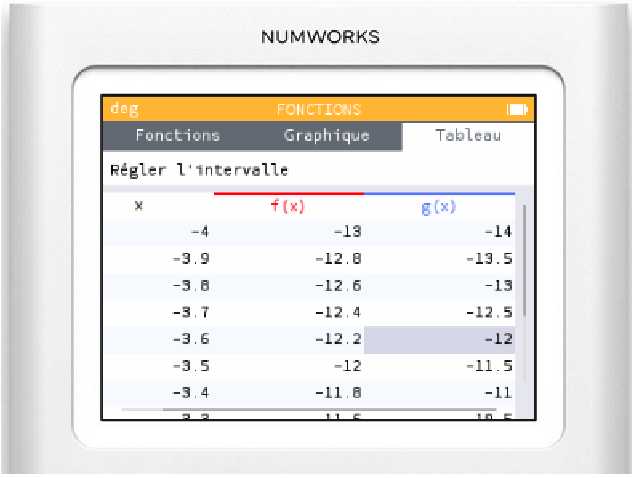
Exemple : Résoudre l'équation $2x - 5 = 5x + 6$

On considère les deux fonctions affines f et g définies par : $f(x) = x - 5$ et $g(x) = 5x + 6$ et on trace un tableau de valeurs de chacune de ces fonctions.



On voit que pour $x = -4$:
$f(x) = -13 > g(x) = -14$
et pour $x = -3$:
$f(x) = -11 < g(x) = -9$
donc la solution de l'équation se trouve entre -4 et -3.

On affine le résultat en réglant l'intervalle de -4 à -3 avec un pas de 0,1.



On voit que pour $x = -3,7$:
$f(x) = -12,4 > g(x) = -12,5$
et pour $x = -3,6$:
$f(x) = -12,2 < g(x) = -12$
donc la solution de l'équation se trouve entre -3,7 et -3,6.

5 Équations particulières

5.1 Résolution d'une équations du second degré

Voir fiche "Équations du second degré".

5.2 Résolution d'une équations avec des fonctions exponentielles et des logarithmes

Rappels sur les fonctions exponentielle et logarithme

1. **Relations fonctionnelles :**

   Exponentielle : pour a et b quelconques

   $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\qquad (e^a)^n = e^{na}$

   Logarithme : pour $a > 0$ et $b > 0$

   $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad \ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$

2. **Relation entre fonctions exponentielle et logarithme :**

   pour $b > 0$: $e^a = b$ équivaut à $a = \ln b$

   Conséquences :

   pour a et b quelconques, $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$
   pour a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$

Résolution d'équations

- A l'aide des propriétés de transformations d'une équation en une équation équivalentes ou à l'aide des relations fonctionnelles, on se ramène à une équation d'un des types suivants :

  $e^{\square} = ...$ $\qquad e^{\square} = e^{\cdots}$ $\qquad \ln(\square) = ...$ $\qquad \ln(\square) = \ln(...)$

- Puis on utilise la relation entre fonctions exponentielle et logarithme en faisant attention aux ensembles de définition.

Exemple : Résoudre $ln(2x-5) - ln(-x+3) = 0$

$$ln(2x-5) - ln(-x+3) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad ln(2x-5) = ln(-x+3)$ $\qquad$ Propriétés équations équivalentes

$\Leftrightarrow \quad 2x-5 = -x+3$ et $2x-5 > 0\,;\ -x+3 > 0$ $\qquad$ Conséquence relation entre exp et ln

On résout $2x-5 = -x+3$, on trouve $x = \dfrac{8}{3}$

$2 \times \dfrac{8}{3} - 5 = \dfrac{1}{3} > 0$ et $-\dfrac{8}{3} + 3 = \dfrac{1}{3} > 0$.

Les conditions $2x-5 > 0$ et $-x+3 > 0$ sont vérifiées pour $x = \dfrac{8}{3}$, donc

$\dfrac{8}{3}$ est la solution de l'équation $ln(2x-5) - ln(-x+3) = 0$.

Résolution d'équations du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$

- On effectue **un changement de variable** en posant $X = e^x$
- On résout l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$
- On ne garde que les solutions positives x_n de cette équation, et on résout les équations $x_n = e^x$

Exemple : Résoudre $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
On pose $X = e^x$ et on résout l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$.
On trouve deux solutions -1 et 3.
$-1 < 0$ ne convient pas, donc $e^x = 3$ d'où $x = \ln 3$.

La solution de $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ est $\ln 3$