Limites de fonctions

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
• Je sais conjoncturer limites et asymptotes graphiquement. • Je sais utiliser la notation $\lim\limits_{x \to \dots} f(x)$ • Je connais les limites des fonctions de références. • Je sais calculer une limite à l'aide des opérations.	•Je sais calculer une limite à l'aide des opérations et des fonctions composées. •Je sais lever une forme indéterminée simple. • Je sais déterminer par le calcul la position d'une courbe par rapport à son asymptote.	• Je sais lever une forme indéterminée en me ramenant à la croissance comparée de deux fonctions de référence.

Cette année, nous chercherons les limites des fonctions uniquement aux bornes ouvertes des intervalles de définition des fonctions.

Idée générale : Si f est définie sur $]a;b[$, $f(a)$ n'existe pas, mais si $f(x)$ s'approche de plus en plus d'une valeur l quand x s'approche de a, on dit que f a une limite quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
De même on peut définir des limites en $-\infty$, en $+\infty$ et les limites peuvent être infinies.

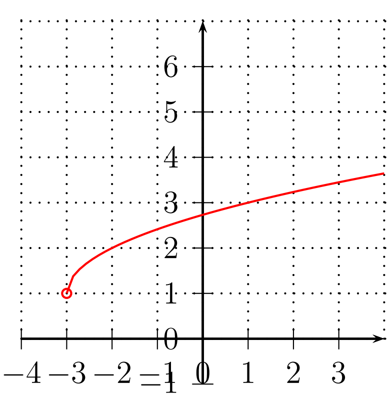
5 Détermination graphique

Avertissement : En toute rigueur, il est impossible de déterminer graphiquement une limite, car le graphique ne couvre pas à la fois l'ensemble de l'intervalle de définition et l'ensemble des valeurs prises par la fonction.

Le codage des asymptotes apporte une solution à ce problème dans certains cas.

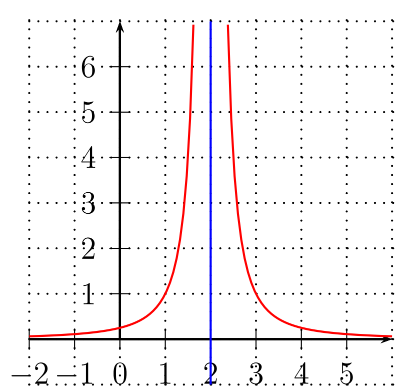
5.1 Limite en un point

f est définie sur $]-3;+\infty[$



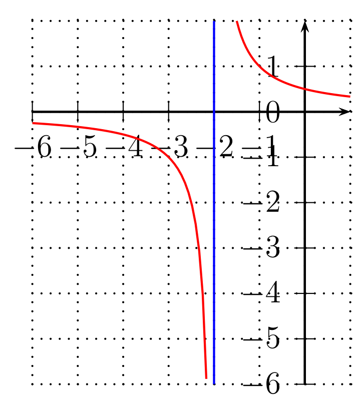
$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$
Il n'y a pas d'asymptote.

f est définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

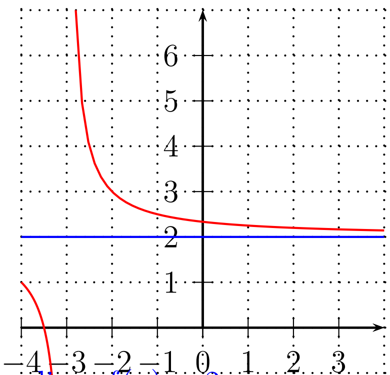
f est définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$



$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

5.2 Limite en $+\infty$

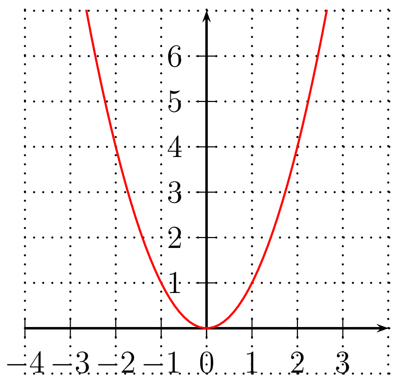
f est définie sur $]-5;-3[\,\cup\,]-3;+\infty[$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

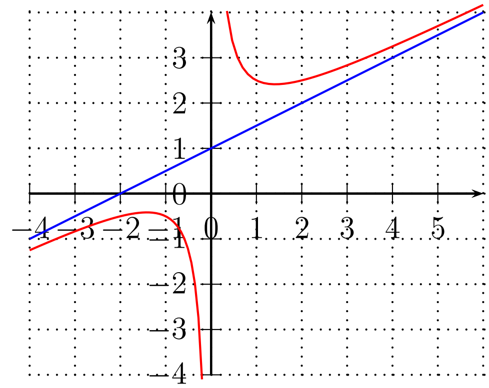
f est définie sur $]-\infty;+\infty[$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

f est définie sur $]-\infty;+\infty[$

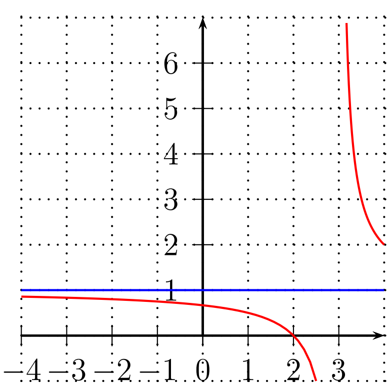


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

5.3 Limite en $-\infty$

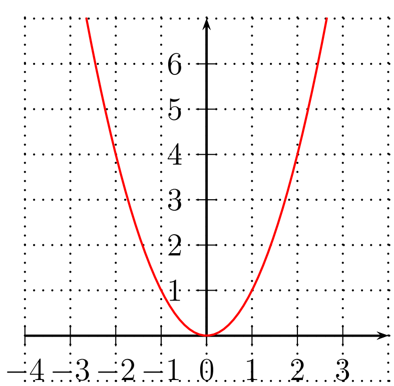
f est définie sur $]-5;3[\,\cup\,]3;+\infty[$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

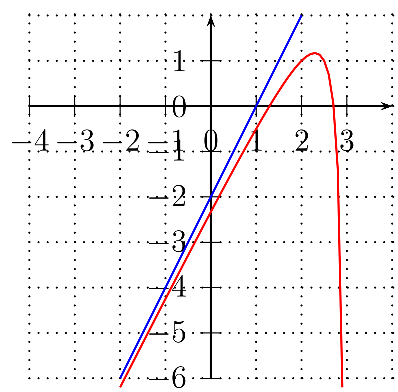
f est définie sur $]-\infty;+\infty[$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Il n'y a pas d'asymptote.

f est définie sur $]-\infty;3\,[$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

6 Asymptotes

Définition :

Soit f définie sur un intervalle ouvert de borne le réel a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d d'équation $x = a$ est une **asymptote horizontale** en a.

Définition :

Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

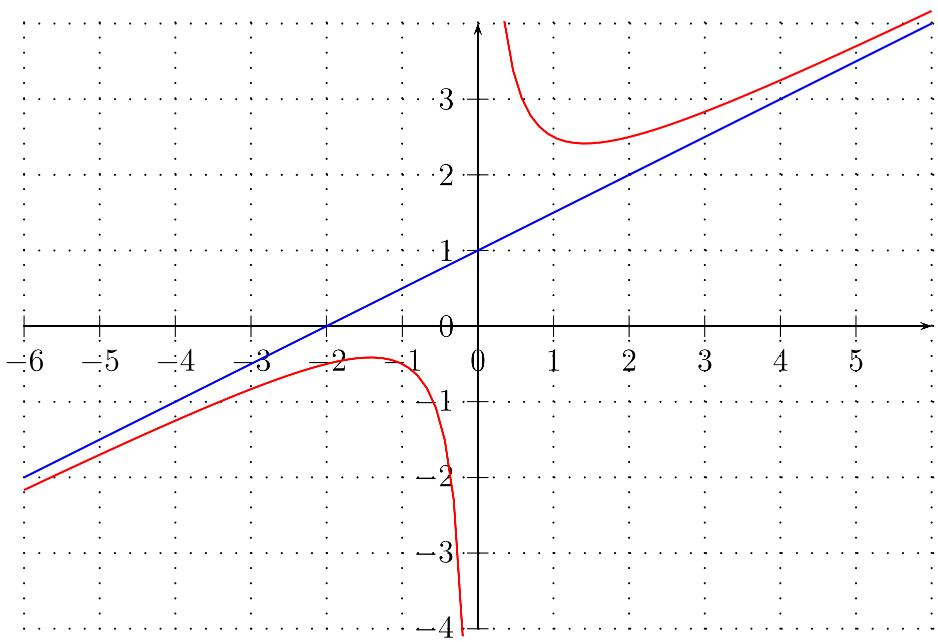
on dit alors que la droite d est une **asymptote** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Définition :

Dans la définition précédente :

- Si $a \neq 0$ on dit que la droite d est une **asymptote oblique**.
- Si $a = 0$ on dit que la droite d est une **asymptote horizontale**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1 \right) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \right) = 0.$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ en $+\infty$.

7 Limites des fonctions de références

Voir les fiches des fonctions de références.

8 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit "FI" désigne une forme indéterminée, c'est-à-dire qu'on ne peut pas dire si la limite existe, ni la calculer à l'aide des opérations sur les limites.
Il faudra si possible **lever l'indétermination** c'est l'objet de la section suivante.

8.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	$l+l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemples :

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+x^2\right)=+\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x^2)=+\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+x^3)=-\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x^3)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

8.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f\times g)$	$l\times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple :

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to0}(e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to0}(e^x-2) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to0}[(e^x+3)\times(e^x-2)]=-4.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to0^+}(x-3) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right]=-\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-1)\times x^3]=+\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$ est une FI du type $0\times\infty$.

8.3 Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

<u>Exemple :</u>

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^x - 2) & = & -1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+3}{e^x-2}\right) = e^5.$$

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$$

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x-4}{x}\right) = -\infty.$$

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = +\infty.$$

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^3}\right) \quad \text{est une forme indéterminée.}$$

➔ $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{est une forme indéterminée .}$$

8.4 Limite d'une fonction composée

Propriété :

Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

Si $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \lim\limits_{x\to b} g(x)=c\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to a} g[f(x)]=c.$

Exemple : Calcul de "composition" de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to -\infty}(x+3) & = & -\infty\\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X & = & 0\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+3}=0.$

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln X & = & +\infty\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(2x+1)=+\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to 0}(x+4) & = & 4\\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} & = & 2\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4}=2.$

8.5 Calcul de limites dans le cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Propriété :
Le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^2-x)$

$3x^2$ est le terme de plus haut degré de $3x^2-x$ or $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^2-x)=+\infty$

Propriété :
Le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dicté par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$

x^2 est le terme de plus haut degré de x^2+2x+1
$2x^2$ est le terme de plus haut degré de $2x^2-3$ or $\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$
donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)=\dfrac{1}{2}$

Croissance comparée de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissance

Propriété :
Pour tout nombre réel α strictement positif :

- ♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0.$
- ♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty.$
- ♦ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^\alpha \ln x\right) = 0.$