Vecteurs - Partie 2

1 Coordonnées d'un vecteur

Dans toute cette section le plan affine est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

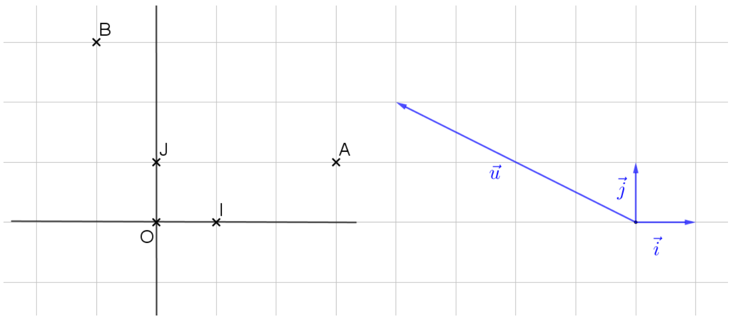
1.1 Calcul des coordonnées d'un vecteur noté à l'aide de points

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan,
les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Démonstration :

Exemple :

$A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$,



Propriété : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

Application 1 : Démontrer que un quadrilatère est un parallélogramme.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , on considère les points A(5 ; 1), B(3 ; 2), C(-1 ; -2) et D(1 ;-3). Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2 Coordonnées de vecteurs et opérations

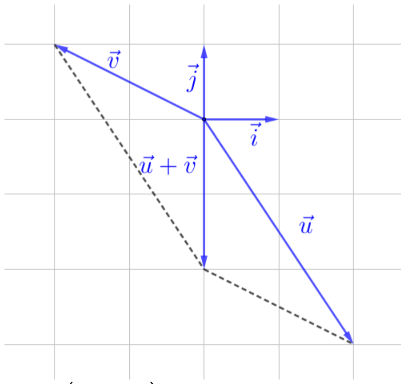
Propriété (admise) : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

Démonstration :

Application : Le plan vectoriel est muni d'une base $(\vec{i};\vec{j})$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$



Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ un vecteur, les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx_{\vec{u}} \\ ky_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

Démonstration :

Application : A partir de l'énoncé de l'application précédente, calculer les coordonnées de $-5\vec{u}$

3 Déterminant, caractérisation de la colinéarité

Définition : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans une base du plan vectoriel. Le nombre $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

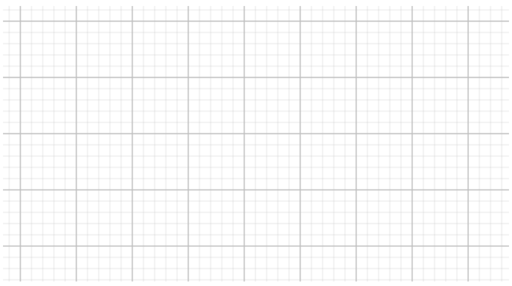
Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemples : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel,
soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$,$\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

3.1 Application 1 : Parallélisme de deux droites

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et les points A(-1 ;1), B(1 ;2) et C(-3 ;-1) et D(4 ;5). Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Solution :

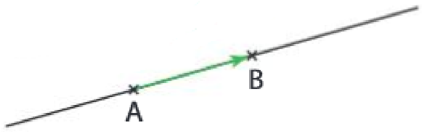


3.2 Application 2 : Alignement de points

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et les points A(-2 ; 3), B(2 ;1) et C(6 ; -1). Les points A,B,C sont-ils alignés ?

4 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition : On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) un vecteur qui a une notation de la forme $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite d.



Remarque : Tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

Propriété : Dans un repère orthonormé du plan, une droite de pente m admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$