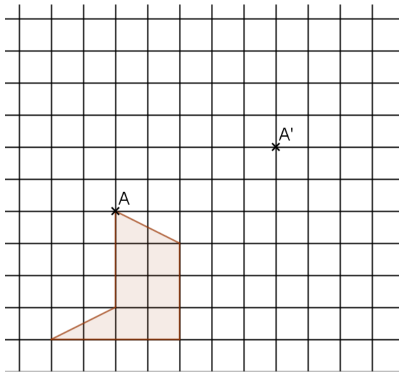
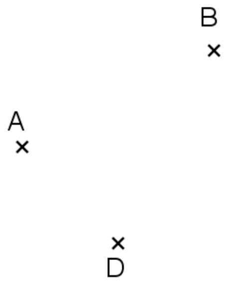
Chapitre 1-Vecteurs

1 Rappel sur les translations



Définition :
La translation qui transforme A en A' est le déplacement qui se fait :

- dans la direction de la droite (AA')
- suivant le sens de A à A'
- de la longueur AA'



Propriété : (admise) C est l'image de D par la translation qui transforme A en B si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Propriété : Dans ce cas, on a :

- (AB) et (DC) sont parallèles,
- AB = DC

2 Vecteurs - Définition

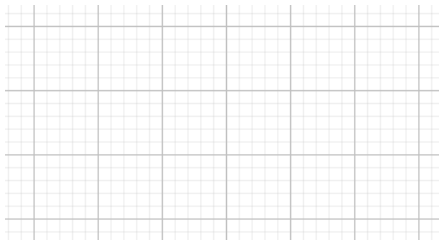
Propriété-définition :

A toute translation, on peut associer un objet mathématique appelé **vecteur**.

Un vecteur **agit** sur l'ensemble des points par la translation associée.

Dans l'exemple ci-contre :

B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$
C est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$



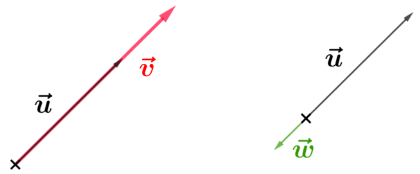
Propriété : (admise) Un vecteur est caractérisé par :
- sa direction
- son sens
- sa longueur appelée **norme** du vecteur.

Notation On note $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

3 Colinéarité - Vecteurs opposés

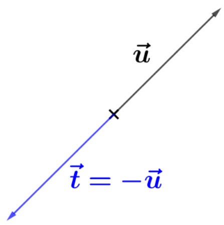
Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Dans les exemples ci-contre :



Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, un sens différent et la même norme, on dit qu'ils sont **opposés**.

Dans l'exemple ci-contre :



Notation : On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

Remarque : Si la translation de vecteur $\vec{u}$ envoie le point A sur le point B, alors la translation de vecteur opposé $-\vec{u}$ envoie B sur A.

4 Notation des vecteurs à l'aide des points - vecteurs égaux

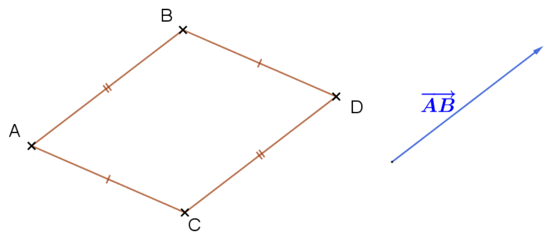
Notation : On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur de la translation qui envoie A sur B.

Remarque : $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur de la translation qui envoie B sur A, donc $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Exemple : Le vecteur de la translation qui envoie A sur B est $\overrightarrow{AB}$.
$ABDC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}$ est aussi le vecteur de la translation qui envoie C sur D.

Convention :
On écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux.**



Propriété : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Exemple d'application :On considère l'hexagone régulier ABCDEF de centre O ci-contre.

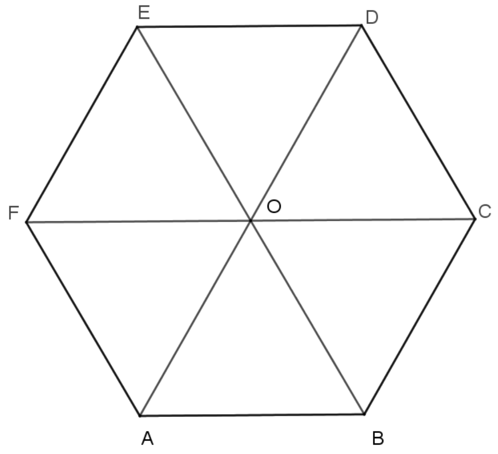
1. Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{OA}$.
2. Les vecteurs suivants sont-ils égaux ? Justifier.
   - $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD}$

   - $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$

   - $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EO}$

   - $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$

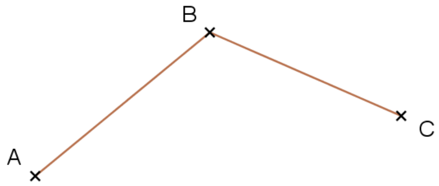
3. Que peut-on dire du quadrilatère ABCO ?

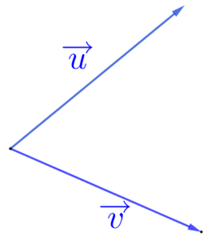


5 Vecteurs et opérations

5.1 Somme de deux vecteurs

Propriété : (admise) Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation qui envoie A sur B et $\vec{v}$ est le vecteur de la translation qui envoie B sur C, alors $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de la translation qui envoie A sur C.

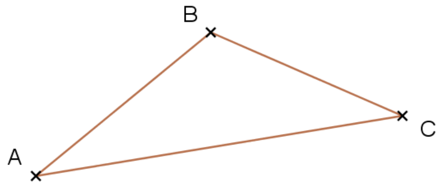




Propriété : Relation de Chasles

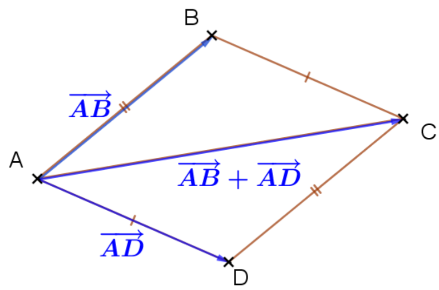
Soient A, B, C trois points du plan,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



Propriété : Soit ABCD un parallélogramme

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$



Propriété : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Différence de deux vecteurs

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Propriété : $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

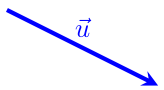
5.2 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition : On note $k\vec{u}$ le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, ce **vecteur** est défini par :

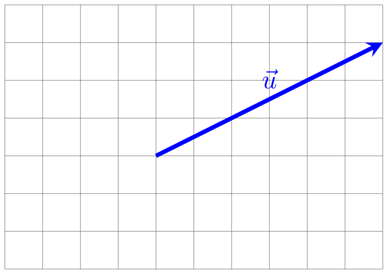
- Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et sa norme est $k \|\overrightarrow{u}\|$
- Si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ a la même direction et le sens contraire de $\vec{u}$ et sa norme est $(-k).\|\overrightarrow{u}\|$

Exemples :

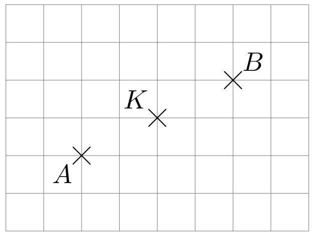
$\vec{v} = 3\vec{u}$



$\vec{v} = -\dfrac{2}{3}\vec{u}$



$\overrightarrow{AK} = ...\overrightarrow{AB}$



Propriété : (admise) Le vecteur nul est colinéaire avec tous les autres vecteurs.

Propriété : Si $k\vec{u} = \vec{0}$ alors $k = 0$ ou $\vec{u} = 0$.

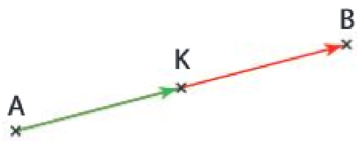
Démonstration :

Propriété : $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété : (admise) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors il existe k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété : L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est $(-1).\vec{u}$, on a donc : $-\vec{u} = (-1).\vec{u}$.

Propriété : Caractérisation du milieu d'un segment
K est le milieu de $[AB]$ si et seulement si l'une de ces égalités est vraie :



-
-
-

5.3 Calcul vectoriel

Propriété : (admise)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k', on a :

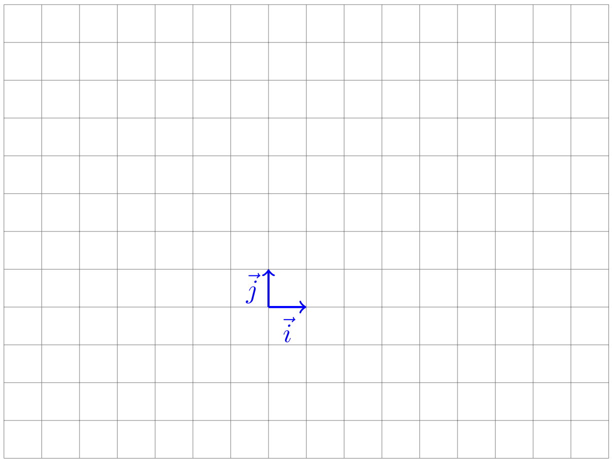
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $(k \times k')\vec{u} = k \times \vec{u} + k' \times \vec{u}$

Exemple :

On considère quatre vecteurs : $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{u} = 2\vec{i}+4\vec{j}$ et $\vec{v} = 6\vec{i}-2\vec{j}$

1. Exprimer $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

2. Représenter $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ dans le plan vectoriel ci-contre.

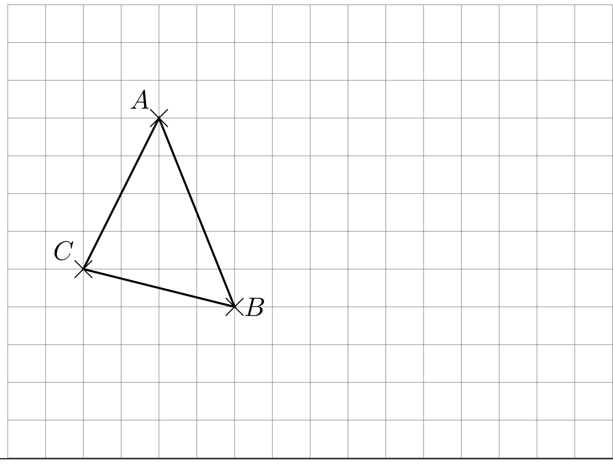


.

Exemple 2 : Application au plan affine

Soient A,B,C trois points du plan. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

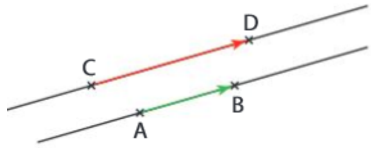
1. Simplifier l'expression du vecteur $\overrightarrow{AD}$. Construire le point D.
2. Que peut-on en déduire à propos des droites (AD) et (BC) ?



6 Applications de la colinéarité

6.1 Parallélisme de deux droites

Propriété : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.



Application : Démontrer que deux droites sont parallèles - voir l'exemple du paragraphe 4.3

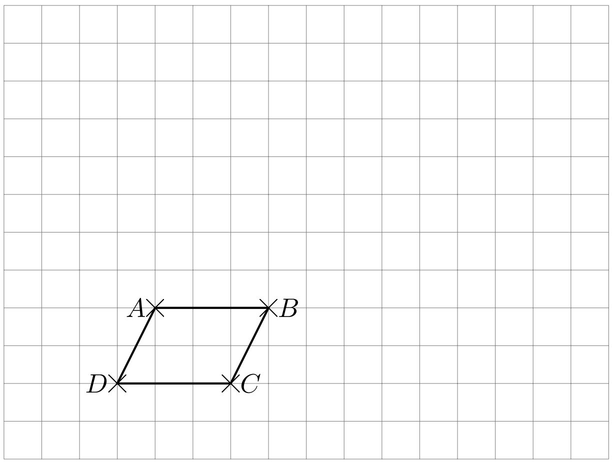
6.2 Alignement de trois points

Propriété : Trois points A,B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : Pour montrer l'alignement de trois points il suffit de montrer la colinéarité de deux vecteurs dont une notation fait intervenir le même point. Dans la définition le point C est commun aux deux notations.

Exemple :
ABCD est un parallélogramme.

1. Construire le point M tel que :
   $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
2. Compléter la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{C...} = \overrightarrow{...A} + \overrightarrow{...M}$
3. Déduire des questions précédentes que :
   $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CB}$



4. Que peut-on dire des points B, C, D ?