Probabilités

1 Expérience aléatoire et évènements

1.1 Définitions

Définition
Une expérience est **aléatoire** si elle vérifie trois conditions :
- elle est reproductible dans les mêmes conditions
- elle conduit à des **issues** qu'on est parfaitement capable de nommer
- on ne peut pas savoir laquelle de ces issues va se produire

Définition
L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers** et on le note Ω.

Exemple : Tirer sur une cible rouge et verte et regarder la couleur de la zone atteinte est une expérience aléatoire.
L'univers est $\Omega = \{"rouge"; "vert"\}$

Exemple : Lancer un dé à 6 faces différentes et noter le numéro de la face supérieure est une expérience aléatoire.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Exemple : Lancer un dé à 6 faces différentes et regarder si la face supérieure est paire ou impaire est **une autre expérience aléatoire**.
L'univers est $\Omega = \{\text{paire}; \text{impaire}\}$

Définition
Un **évènement** est un ensemble d'issues d'une expérience aléatoire.

Notation : On note les évènements en général par des lettres majuscules.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces et à noter le numéro de la face supérieure.
"Obtenir un multiple de 3" est un évènement de cette expérience.
Il est composé des issues

Notons cet évènement A, on a

1.2 Opérations sur les évènements d'une expérience aléatoire

Définition
L'évènement contraire de A est l'évènement qui se réalise quand A ne se réalise pas, on le note $\bar{A}$

Définition
Si A et B sont deux évènements, alors l'intersection de A et B est l'ensemble des issues qui sont dans A **et** dans B, on le note $A \cap B$ et on lit "A inter B"

Définition
Si A et B sont deux évènements, alors la réunion de A et B est l'ensemble des issues qui sont dans A **ou** dans B, on le note $A \cup B$ et on lit "A union B"

Exemple : On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 0 à 11, et on regarde le numéro inscrit sur la face supérieure.

On note A l'évènement correspondant à "le nombre obtenu est pair".
On note B l'évènement correspondant à "le nombre obtenu est un multiple de 3".

2 Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition
Définir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est :

- préciser l'univers,
- donner la loi de probabilité.

Définition
On définit la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire en associant à chaque issue un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure ń la chance ż que cette issue a de se produire.

Définition
Ce nombre s'appelle **la probabilité** de l'issue.

Propriété (admise)
La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple : les éléments suivants constitue un modèle pour l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce et à regarder sur quelle face elle tombe.

$\Omega = \{"pile"; "face"\}$

Issue	Pile	Face
Probabilité	0,8	0,2

Ce **modèle** de probabilité ne correspond pas au lancer d'une pièce équilibrée mais à celui d'une pièce truquée.

3 Probabilités

3.1 Probabilité d'un évènement

Définition
La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des issues de A.
On la note $P(A)$.

Propriétés :

1. La probabilité de l'évènement certain est égale à 1
2. La probabilité de l'évènement impossible est égale à 0.
3. Si A est un évènement $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$

Calcul des probabilités utilisant les opérations sur les évènements

Propriété : (admise) Si A et B sont deux évènements alors :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Propriété : Si A et B sont deux évènements incompatibles alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3.2 Probabilités dans une situation d'équiprobabilité

Définition : Dans une **situation d'équiprobabilité**, toutes les issues ont la même chance de se produire.

Propriété : La probabilité d'une issue est donc $p = \dfrac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{1}{n}$ si n est le nombre d'issues.

Remarque : Dans les énoncés d'exercices, certains indices peuvent indiqués une situation d'équiprobabilité : ń prendre au hasard ż ; ń le dé est équilibré ż ; ń les boules sont indiscernables au toucher ż.

3.3 Probabilité d'un évènement en cas d'équiprobabilité

Propriété : Soir A un évènement. S'il y a équiprobabilité, alors :

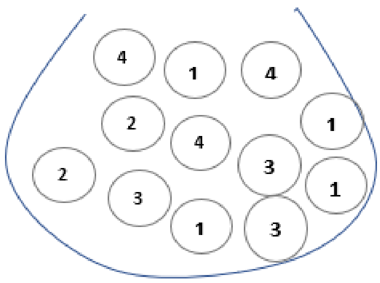
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

.

3.4 Calcul de probabilité en se ramenant à une situation d'équiprobabilité

Méthode : Dans certains cas, une expérience aléatoire ne relève pas d'une situation de équiprobabilité,mais il est possible d'utiliser une autre expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables pour calculer les probabilités voulues.

Exemple
On tire au hasard une boule dans un sac et on regarde son numéro.
Les boules sont indiscernables au toucher.



La loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule au hasard et à noter son numéro est :

Issue	1	2	3	4
Probabilité				

Expérience à plusieurs épreuves

Pour compter le nombre de cas dans une expérience aléatoire à deux épreuves, on peut faire un tableau (voir exercice 68 page 352 par exemple) ou un arbre des possibles(voir exercice 52 page 350 par exemple) .

Pour compter le nombre de cas dans une expérience aléatoire à plusieurs épreuves, on peut faire un arbre des possibles (voir exercice 78 page 354)

3.5 Calcul des probabilités par expérimentation et observation des fréquences

Propriété : (admise)
Quand on reproduit un grand nombre de fois, une expérience aléatoire, la fréquence d'un évènement tend à se stabiliser autour de la probabilité de cet évènement.

Méthode : Quand on a aucun moyen de déterminer à priori la probabilité d'un évènement, on reproduit un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. La fréquence observée de l'évènement est une valeur approchée de la probabilité de l'évènement.

Exemple : Dans l'activité de la cible, pour déterminer la probabilité que l'on a d'atteindre la zone rouge,nous avons effectué un grand nombre de lancers.

Dans cet exemple, on a atteint la zone rouge 4276 fois sur 5000, donc la probabilité que Marc atteigne la zone rouge est d'environ $\dfrac{4276}{5000} \simeq 0,86$.

Remarque 1 : Concrètement pour pouvoir utiliser cette valeur approchée, il faut être en mesure d'encadrer l'erreur commise.

Remarque 2 : Très fréquemment cette méthode est la seule possible pour déterminer des probabilités.