Equations de droites

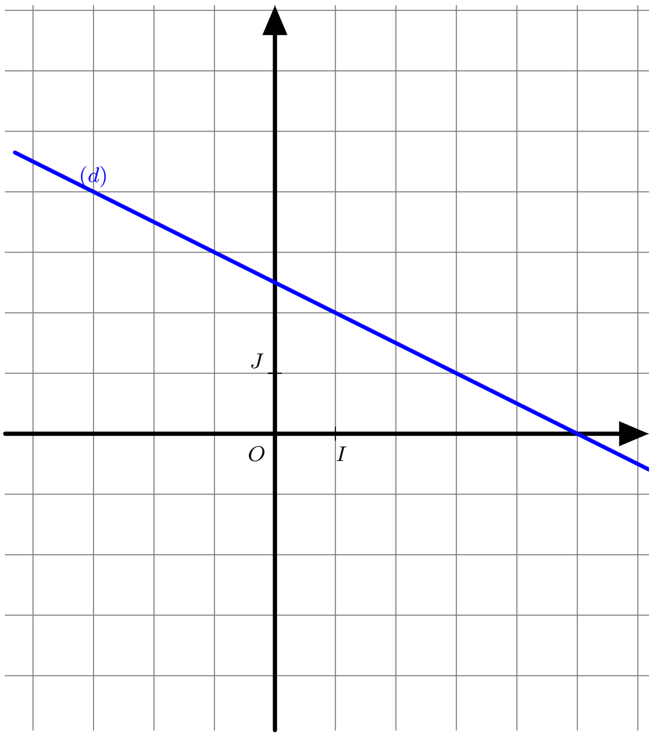
Remarque : Dans tout le chapitre, le plan sera muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1 Équations de droites

Définition :

Une **équation de droite** est une relation algébrique liant deux nombres réels x et y qui sera vérifiée par les coordonnées de tous les points de la droite et uniquement des points de la droite.

Exemple :
Soit (d) la droite d'équation $x + 2y = 5$.

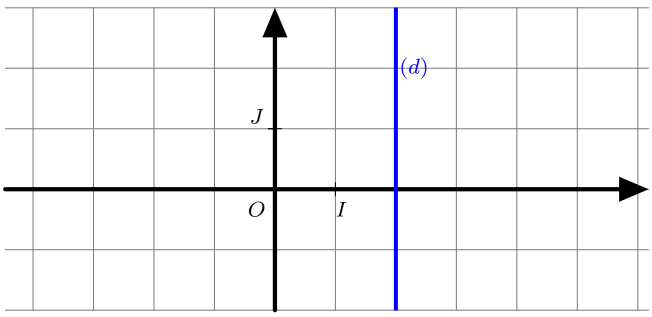


- Soit le point M de coordonnées $x_M = 1$ et $y_M = 2$.

- Soit le point N de coordonnées $x_N = 2$ et $y_N = 1,4$

Peau de banane :
Une "équation" de droite n'est pas une équation au sens habituel, x et y ne sont pas des inconnues qu'il faut trouver mais des variables qui dépendent du point choisi.
On ne résous pas une équation de droite, il n'y a pas de solution.

Propriété : (admise) Une droite qui est parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation et une seule de la forme $x = p$.



Proposition : (admise) Une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation et une seule de la forme $y = mx + p$.

Définition :
Une **équation réduite** est une équation de droite de la forme $x = p$ ou $y = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels.

Remarque :
Si $y = mx+p$ est l'équation réduite de la droite (d) alors (d) est la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$

Définition :
Une **équation cartésienne** est une équation de droite de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des nombres réels avec a ou b non nul.

Propriété : Toute droite (d) du plan admet une équation cartésienne.

Démonstration :

Propriété : (admise) Soient a, b, c trois nombres réels avec au moins a ou b non nul, il existe une droite (d) telle que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (d).

Remarque : Une droite a une infinité d'équations cartésiennes.

2 Déterminer une équation de droite par le calcul

Méthode 1 : Avec la fonction affine associée si elle existe.

Méthode 2 : Connaissant les coordonnées de deux points de la droite :

Exemple : Soient $A(3; 1)$, $B(-1; 5)$ deux points du plan, déterminer une équation cartésienne de (AB)

Méthode 3 : Connaissant les coordonnées d'un point de la droite et un vecteur directeur :

Exemple : Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $A(3; -2)$

Méthode 4 : Connaissant les coordonnées d'un point de la droite et la pente de la droite :

Exemple : Déterminer une équation de la droite (d') passant par $A(\frac{1}{3}; -2)$ et parallèle à la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$

3 Coefficient directeur ou pente d'une droite :

Définition :
Si $y = mx + p$ est l'équation réduite d'une droite (d), le **coefficient directeur**, ou **pente de la droite** de la droite (d) est le nombre m.

Exemple : Soit (d) la droite d'équation $y = 2x + 3$ le coefficient directeur de cette droite est 2.

Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas de coefficient directeur.

Méthode 1 : Déterminer le coefficient directeur d'une droite graphiquement.

Voir chapitre :

Méthode 2 : Déterminer le coefficient directeur d'une droite connaissant deux points de la droite.

Voir chapitre :

Méthode 3 : Déterminer le coefficient directeur d'une droite avec une équation de droite.

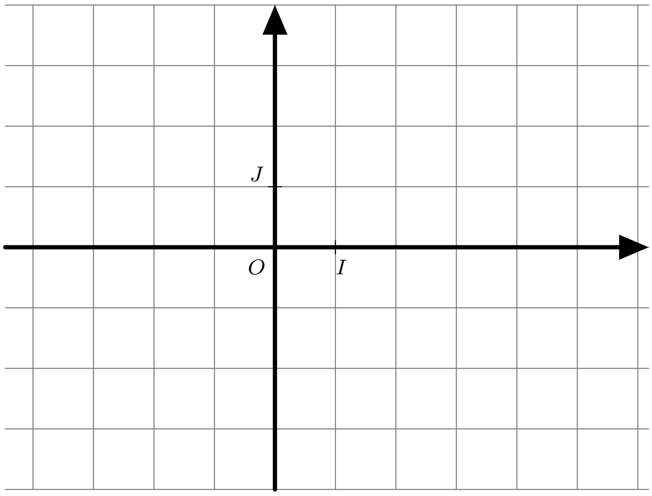
- On transforme l'équation pour obtenir une équation réduite, puis on lit le coefficient directeur.
- Si la droite n'a pas d'équation réduite, elle n'a pas de coefficient directeur.

Exemple :
Déterminer le coefficient directeur de la droite d'équation $4x + 3y - 7 = 0$

4 Tracer une droite connaissant une équation :

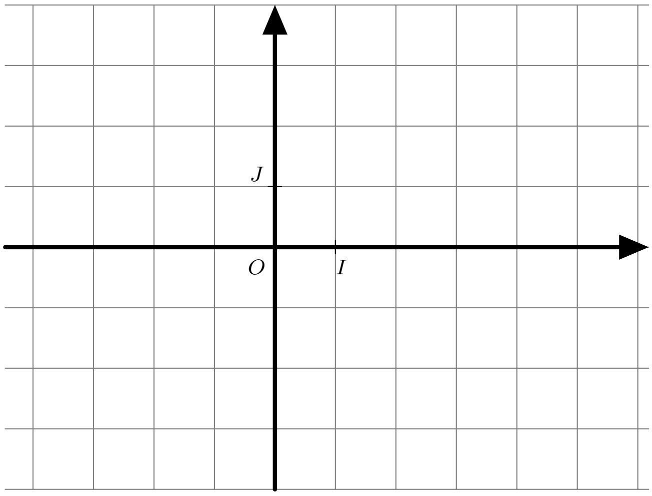
<u>Méthode 1 :</u> Avec le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Tracer la droite d'équation $y = 3x - 1$.



<u>Méthode 2 :</u> En cherchant deux points de la droite.

Tracer la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$



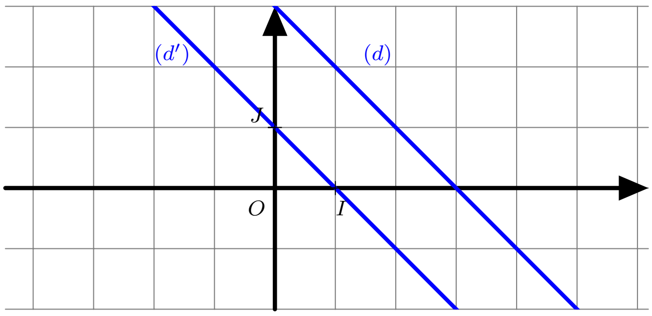
5 Droites parallèles et droites sécantes

Propriété :(admise) Soient deux droites (d) et (d') qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées :

- Si (d) et (d') ont le même coefficient directeur alors elles sont **parallèles**.
- Si (d) et (d') ont des coefficients directeurs différents alors elles sont **sécantes**.

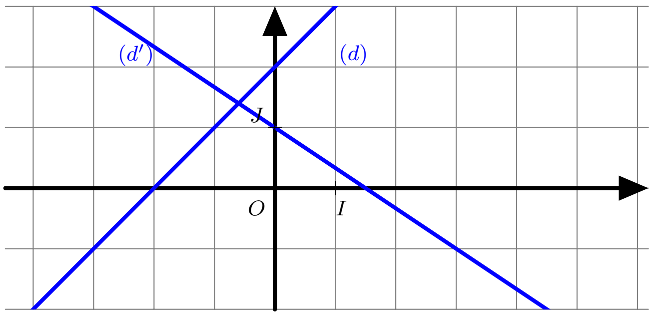
Exemple 1 :

Une équation de (d) est $y = -x + 1$.
Une équation de (d') est $y = -x + 3$.
(d) et (d') ont le même coefficient directeur -1 : ce sont donc deux droites parallèles.



Exemple 2 :

Le coefficient directeur de (d) est 1, celui de (d') est $-\dfrac{2}{3}$, donc ces droites ne sont pas parallèles.



6 Alignement de points

Propriété : Trois points A,B, C sont alignés si et seulement si les coordonnées de C vérifient une équation de (AB).

Exemple : Soient $A(1;1)$, $B(6;4)$ et $C(24;16)$ trois points du plan, on admet qu'une équation de (AB) est $2x - 3y = -4$, ces points sont-ils alignés ?

Propriété : Trois points A,B, C d'abscisses différentes sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Exemple :

Soient $A(-4;-2)$, $B(5;4)$ et $C(2;2)$ trois points du plan, ces points sont-ils alignés ?