

A. Généralités

1. Le langage des probabilités : épreuve, issues, univers, événement

L'ensemble Ω de tous les résultats possibles s'appelle l'**univers** des issues. On dit aussi que Ω est l'**ensemble de tous les issues possibles**.

Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω .

L'**événement** $A \cap B$ se produit quand l'événement A et l'événement B se produisent.

L'**événement** $A \cup B$ se produit quand l'événement A ou l'événement B se produit.

2. Notion d'équiprobabilité. Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

Propriété

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

3. Événement impossible et événement certain.

Un événement qui ne peut se réaliser est appelé **événement impossible** ; sa probabilité est égale à 0. On le note $\emptyset$

Un événement qui est sûr d'être réalisé est appelé l'**événement certain**. Sa probabilité est 1.

4. Événement contraire

Définition

L'événement $\bar{A}$ contraire d'un événement A est l'événement réalisé quand A n'est pas réalisé.

D'un point de vue ensembliste, l'événement $\bar{A}$ est la partie de Ω qui contient les issues qui ne sont pas dans A .

Connaissant la probabilité d'un événement A , on obtient facilement la probabilité de l'événement contraire :

Propriété

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

5. Événements incompatibles

Définition

Deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque A et B ne se produisent jamais en même temps.

Propriété

Pour deux événements A et B incompatibles, on a donc $p(A \cap B) = 0$

6. Réunion de deux événements**Propriété**

Pour tous événements A et B, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Cas particulier : quand A et B sont incompatibles, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

7. Résumé des propriétés des probabilités**Propriétés**

- 1) $0 \leq p(A) \leq 1$ (une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1)
- 2) $p(\emptyset) = 0$
- 3) $p(\Omega) = 1$
- 4) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$, pour tout événement A de Ω
- 5) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ pour tous événements A et B de Ω
- 6) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour tous événements A et B incompatibles

B. Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

Une probabilité conditionnelle est une probabilité sous condition ; la probabilité que l'événement B se réalise sachant que A est réalisé par exemple.

1. Probabilités conditionnelles**Définition**

Lorsque l'événement A n'est pas l'ensemble vide, la probabilité conditionnelle de B sachant A est :

$$p_A(B) = \frac{\text{Card}(B \cap A)}{\text{Card}(A)}$$

où Card(A) est le nombre d'éléments contenu dans l'ensemble A.

Propriété (admise)

Lorsque la probabilité d'un événement A est non nulle, la probabilité conditionnelle de B sachant A est :

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

2. Probabilité de l'intersection de 2 évènements.**Propriété (admise)**

Lorsque la probabilité d'un événement A est non nulle, la probabilité de l'intersection $B \cap A$ est :

$$p(B \cap A) = p_A(B) \times p(A)$$

Remarquez aussi que si la probabilité de B est non nulle, rien n'empêche d'intervertir les rôles de A et B , et puisque les événements $B \cap A$ et $A \cap B$ sont le même événement, on obtient :

$$p(B \cap A) = p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

3. Formule des probabilités totales**Propriété**

Étant donné deux évènements E et A :

$$p(E) = p(A) \times p_A(E) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(E)$$

Démonstration :

Propriété (admise)

Soit A, B et C trois évènements incompatibles tels que $A \cup B \cup C = \Omega$

$$p(E) = p(A) \times p_A(E) + p(B) \times p_B(E) + p(C) \times p_C(E)$$

Illustration :

4. Règles de représentation d'une expérience aléatoire à plusieurs épreuves par un arbre de probabilités

5. Indépendance de deux événements**Définition**

Soit A un évènement de probabilité non nulle et B un évènement, B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$

Concrètement un évènement B est indépendant d'un évènement A si la réalisation de A ne change pas la probabilité que B se réalise.

Propriété

Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle, si B est indépendant de A alors A est indépendant de B.

Propriété (admise)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles, les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) Les événements A et B sont indépendants.
- 2) $p(B) = p_A(B) = p_{\bar{A}}(B)$
- 3) $p(B \cap A) = p(B) \times p(A)$

