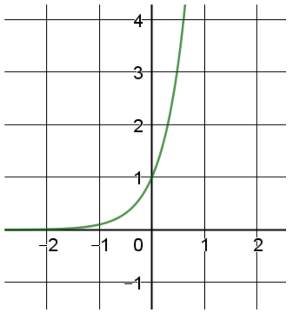
Fonction logarithme décimal

1) Contexte



La fonction exponentielle de base 10 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et tout nombre b strictement positif est l'image par cette fonction d'un nombre réel.

D'où la propriété :

Propriété : Soit b un nombre réel strictement positif, l'équation $10^x = b$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2) Définition du logarithme décimal

Définition :
Soit b un nombre réel strictement positif, l'unique solution de l'équation $10^x = b$ est appelée le logarithme décimal de b.

On le note $\log(b)$

On a donc $10^x = b \iff x = \log(b)$

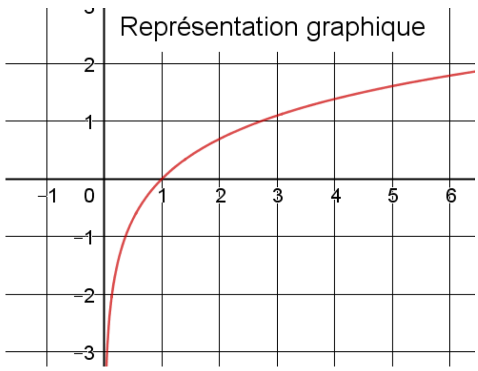
Propriétés : (découlant de cette définition)

(1) $\log(1) =$
(2) $\log(10) =$
(3) Soit n un nombre entier relatif $\log(10^n) =$
(4) Pour tout nombre réel b strictement positif : $10^{\log(b)} =$
(5) Pour tout nombre réel x : $\log(10^x) =$

Définition :
La fonction qui a tout réel b strictement positif associe l'unique solution de l'équation $10^x = b$ s'appelle la fonction logarithme décimal.

On la note log.

Propriété : La fonction log est définie sur $]0; +\infty[$.



Signes de la fonction log :

3) Sens de variation de la fonction log

Propriété : (admise)

La fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquences :
Pour tous nombres réels positifs x et y :

$$x = y \Leftrightarrow \log(x) = \log(y)$$
$$x < y \Leftrightarrow \log(x) < \log(y)$$

Application 1 : Résolution d'équations du type $10^x = b$ où b est un nombre réel strictement positif.

Résoudre $10^x = 2$

Application 2 : Résolution d'inéquations du type $10^x \geq b$ où b est un nombre réel strictement positif.

Résoudre $10^x \leq 0{,}02$

4) Propriétés algébriques du logarithme décimal

Propriété fondamentale des logarithmes : (admise)

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a :

Propriétés : (conséquences de la précédente)

Soient a et b deux nombres réels strictement positif, n un nombre entier *et* x un réel.

(1) $\log(a^n) =$ (3) $\log\left(\frac{a}{b}\right) =$

(2) $\log(a^x) =$ (4) $\log\left(\frac{1}{b}\right) =$

Exemples : $\log(10) =$ $\log\left(\frac{5}{2}\right) =$ $\log(5^4) =$

5) Applications : résolution d’équations et d’inéquations

Rappels de propriétés utiles pour la résolution des inéquations :

- Quand on additionne ou qu’on soustrait le même nombre aux deux membres d’une inégalité, l’ordre est conservé : $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.
- Quand on multiplie ou qu’on divise par le même nombre strictement positif les deux membres d’une inégalité, l’ordre est conservé : si $c > 0$ alors $a > b \Leftrightarrow a \times c > b \times c$.
- Quand on multiplie ou qu’on divise par le même nombre strictement négatif les deux membres d’une inégalité, l’ordre est inversé : si $c < 0$ alors $a > b \Leftrightarrow a \times c < b \times c$.
- Si f est une fonction croissante alors deux nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre. Si f est croissante alors $a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.
- Si f est une fonction décroissante alors deux nombres et leurs images sont rangés dans l’ordre inverse. Si f est décroissante alors $a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

Application 3 : Résolution d’équations du type $x^a = b$ où b est un nombre réel strictement positif.

Résoudre $2^x = 24$
On donnera la valeur exacte et un arrondi au centième.

Application 4 : Résolution d’inéquations du type $x^a \leq b$ où b est un nombre réel strictement positif.

Résoudre $0{,}3^x < 12$

On donnera la valeur exacte de la borne, puis une troncature au dixième.

<u>Application 5</u> : Résolution d'équations du type $a^x = b$ où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Résoudre $x^{0,3} = 4{,}5$
On donnera la valeur exacte et un arrondi au centième.

<u>Application 6 :</u> Résolution d'inéquations du type $a^x \leq b$ où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Résoudre $x^{3.2} \leq 0{,}8$
On donnera la valeur exacte de la borne, puis une troncature au millième.