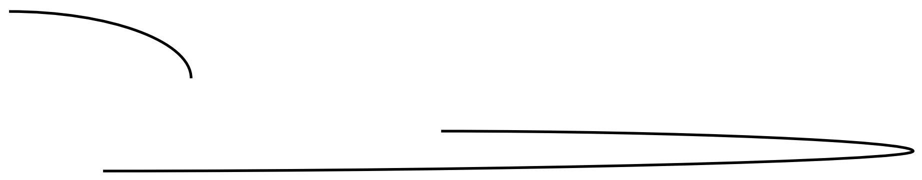
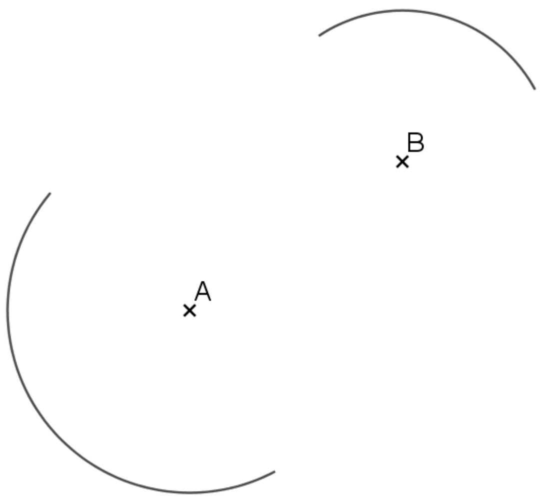
TSTD2A — Coniques – Raccordements de courbes — AV 2024-2025

Coniques – Raccordements de courbes
Fiche d'exercice 3

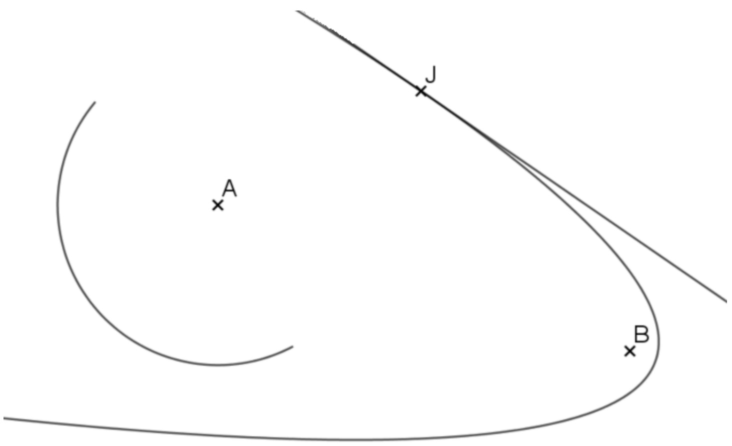
<u>Exercice 1 :</u> Tracer une courbe raccordant les deux courbes tracées de façon continue.



<u>Exercice 2 :</u> Tracer une courbe raccordant les deux arcs de cercles de façon $\mathcal{C}_1$



<u>Exercice 3 :</u> La tangente à la parabole en A est tracée. Tracer une courbe raccordant l'arc de parabole en J à l'arc de cercle de façon $\mathcal{C}_1$



Rappel de cours : propriété caractéristique de la tangente à un cercle

Si (t) est tangente en A au cercle de centre O passant par A alors (t) est perpendiculaire à (OA).

Si (t) passe par A et est perpendiculaire à (OA) alors (t) est tangente en A au cercle de centre O passant par A

Exercice 4 : Adapté du sujet de métropole 2020
À l'occasion de l'anniversaire de la création du fauteuil de Roger Fatus, un bureau de design en propose une nouvelle version.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Dans ce repère, les points A, B, C, D, E, F, G, H et I ont pour coordonnées :

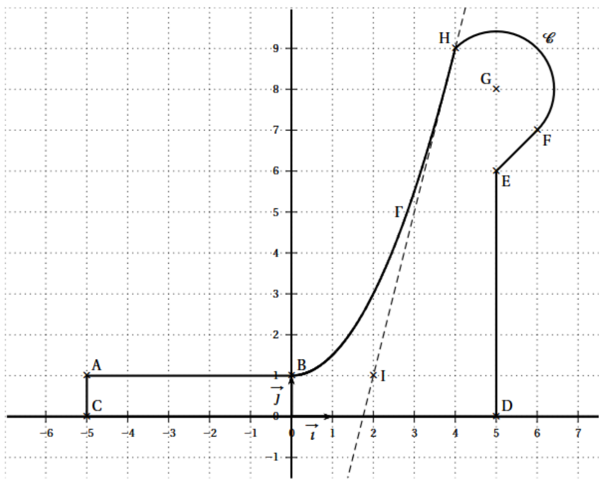
A(−5 ; 1), B(0 ; 1), C(−5 ; 0), D(5 ; 0), E(5 ; 6), F(6 ; 7), G(5 ; 8), H(4 ; 9) et I(2 ; 1).

La nouvelle version du fauteuil de Roger Fatus est représentée en coupe, dans la figure ci-dessous, par les sept objets géométriques suivants :

— les cinq segments [AB], [AC] ,[CD] ,[DE] et [EF],

— l'arc de cercle C de centre G reliant F à H qui représente l'appui-tête du fauteuil,

— la courbe Γ reliant les points B et H qui représente le dossier du fauteuil.



Partie A : Étude de l'appui tête du fauteuil

1) a) Donner le rayon de l'arc de cercle $\mathcal{C}$
   b) Donner une équation du cercle de centre G et de rayon GF.
2) On s'intéresse au segment [EF].
a) Démontrer que les droites (EF) et (FG) sont perpendiculaires.
b) Que peut-on en déduire quant à la nature de la droite (EF) par rapport au cercle de centre G passant par F ?

Partie B : Étude du dossier

La courbe Γ reliant les points B et H, qui représente le dossier du fauteuil, est la courbe représentative, sur l'intervalle [0 ; 4], d'une fonction polynôme f de degré 2 définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels à déterminer.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
La courbe Γ est de plus soumise à la contrainte suivante : la droite (HI) est tangente à la courbe Γ au point H.
1. Prouver que $c = 1$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
3. Déterminer le coefficient directeur de la droite (HI).
4. Montrer que les réels a et b vérifient un système de deux équations à deux inconnues.
-> *Facultatif : résoudre le système et donner les valeurs de a et b.*

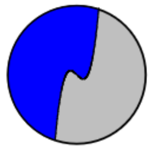
On admet pour la suite que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$
5. Donner l'expression algébrique de $f(x)$.
6. Vérifier que la droite (AB) est tangente à la courbe Γ au point B.
7. a. Compléter le tableau suivant :

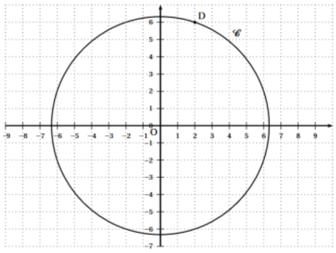
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

On arrondira les résultats au dixième.

b. Placer les points correspondants puis tracer la courbe Γ dans un repère, puis les cinq segments [AB], [AC] ,[CD] ,[DE] et [EF], et l'arc de cercle C de centre G reliant F à H.

Exercice 5 : Adapté du sujet Antilles – Guyane 2019
Un club d'alpinisme décide d'adopter le symbole représenté ci-contre :
La figure ci-dessous montre une représentation, dans un repère orthonormal, du contour circulaire de ce symbole.





Partie A

1. Déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, en utilisant les coordonnées entières du point D situé sur ce cercle (obtenues par lecture sur le graphique).

2. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

Partie B

La courbe insérée dans le logo est la représentation d'une fonction f définie sur l'intervalle [−2 ; 2] dont l'expression en fonction de x est de la forme : $f\,(x) = ax^3 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$..

1. a. Déterminer c sachant que la courbe de f passe par l'origine du repère.

b. Sachant que $f\,(1) = 0$ et que le point D appartient à la courbe représentative de la fonction f , écrire un système de deux équations à deux inconnues vérifié par a et b.

-> Facultatif : résoudre le système et donner les valeurs de a et b.

2. On admet que l'expression algébrique de f est $f\,(x) = x^3 - x$ sur l'intervalle [−2 ; 2].

a. Vérifier que le point D′(−2 ; −6) appartient à la courbe représentative de la fonction f .

b. Calculer $f\,'(x)$, où $f\,'$ désigne la dérivée de la fonction f .

c. -> Facultatif : étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [−2 ; 2].

d. Compléter le tableau de valeurs (arrondir les valeurs au centième).

x	-2	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$							

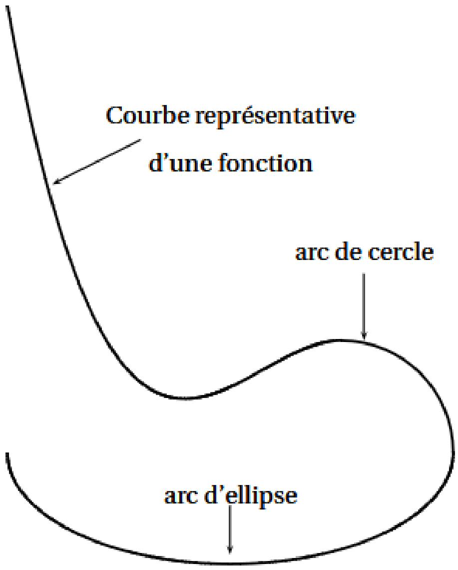
e. Tracer la courbe F représentative de la fonction f dans un repère orthonormé ainsi que le cercle $\mathcal{C}$.

On admet que les points d'abscisses $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les extremum relatifs de la fonction f.

Exercice 6 : Adapté du sujet Métropole 2019

Le mobilier national a présenté en 2017 une exposition intitulée « Sièges en Société, du Roi-Soleil à Marianne » à la galerie des Gobelins.

L'objectif de cet exercice est d'étudier une modélisation mathématique du profil d'un rocking-chair présenté lors de l'exposition.



On envisage pour cette modélisation de raccorder, comme représentés ci-contre, un arc d'ellipse $\mathscr{E}$, un arc de cercle, et la courbe représentative $\mathscr{L}$ d'une fonction.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placer les points :

A(0 ; 125), B(0 ; 25), C(100 ; 25), D(75 ; 50) et E(75 ; 25).
(On prendra 1cm pour 10 unités.)

Partie A : l'arc de cercle $\mathscr{C}$:

Une équation de ce cercle est $(x-75)^2+(y-25)^2=625$.

1) Précisez le centre et le rayon de l'arc de cercle.
2) Vérifiez que les points C et D appartiennent au cercle.
3) L'arc de cercle $\mathscr{C}$ est précisément l'arc CD orienté comme sur la figure. Tracer cet arc de cercle dans le repère orthonormé.
4) a. Tracer sur le graphique la tangente (T) à cet arc de cercle $\mathscr{C}$ au point D.
   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (T) .

Partie B : l'arc d'ellipse $\mathscr{E}$

On considère les points F(50 ; 0) et F'(50 ;50). Et on note $\mathscr{E}$ l'ellipse dont les axes sont les segments [BC] et [FF'].

1) Déterminer une équation de l'ellipse $\mathscr{E}$.
2) L'arc $\mathscr{E}$ est la demi-ellipse $\mathscr{E}$ d'extrémités B et C et contenant le point E. Tracer sur l'annexe une esquisse de l'arc $\mathscr{E}$.

Partie C : la courbe $\mathcal{L}$

La courbe $\mathcal{L}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 75] par :

$f(x) = -0{,}0006x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. On souhaite que la courbe passe par le point A. Montrer alors que $c = 125$.
2. Déterminer l'expression de la fonction f'.
3. Le point D est le point de raccordement de la courbe $\mathcal{L}$ avec l'arc de cercle $\mathcal{C}$. On souhaite que les contraintes suivantes soient vérifiées au point D :
    - la courbe $\mathcal{L}$ passe par D ;
    - la droite (T) de la partie A est tangente à la courbe $\mathcal{L}$ au point D.

    Montrer que les réels a et b vérifient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 75a + b = 2{,}375 \\ 150a + b = 10{,}125 \end{cases}$$

On admet dans la suite que $f(x) = -0{,}0006x^3 + \frac{31}{300}x^2 - 5{,}375x + 125$ sur l'intervalle [0 ;75].

4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f (on arrondira les valeurs à l'unité):

x	0	10	20	25	30	35	40	45	50	60	70	75
$f(x)$	125											

Tracer une esquisse de la courbe $\mathcal{L}$ dans le repère orthonormé.