A. Variables aléatoires

1. Variables aléatoires et loi de probabilités

Définition
On considère une expérience aléatoire.
On définit une variable aléatoire en associant à chaque issue un nombre réel.
On note en général X cette variable aléatoire.

Définition
Soit une expérience aléatoire et X une variable aléatoire associée.
La fonction qui associe à chaque valeur de X la somme des probabilités des issues qui lui correspond est appelée la loi de probabilité de X.
Dans le cas d'une variable aléatoire discrète et finie, on donne en général la loi de probabilité sous forme d'un tableau.

Exemple 1 : On considère l'expérience aléatoire suivante
On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le numéro de la face du dessus.

Les issues sont :

On considère la variable aléatoire qui à chaque issue associe le nombre correspondant, les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

La loi de probabilité est :

Exemple 2 : On considère l'expérience aléatoire suivante
On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le numéro de la face du dessus.

Les issues sont :

On considère la variable aléatoire qui associe 50 si l'issue est inférieure ou égale à 2, 100 si l'issue est 3 et 0 sinon. Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

La loi de probabilité est :

Exemple 3 : On considère l'expérience aléatoire suivante
On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde si le nombre du dessus est pair ou impair.

Les issues sont :

On considère la variable aléatoire qui associe 100 si l'issue est paire, et 0 sinon. Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

La loi de probabilité est :

Notations
Soit a un nombre réel. On note :
$\{X = a\}$ l'évènement « la variable aléatoire X prend la valeur a » et $P(\{X = a\})$ la probabilité associée.
$\{X \geq a\}$ l'évènement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a » et $P(\{X \geq a\})$ la probabilité associée.
On définit de même les évènements : $\{X > a\}$; $\{x \leq a\}$ et $\{X < a\}$

Exemple : Dans l'exemple 2 ci-dessus :
$\{X = 50\} =$ $P(\{X = 50\}) =$

$\{X \geq 50\} =$ $P(\{X \geq 50\}) =$

2. Espérance d'une variable aléatoire

Définition
Soit X une variable aléatoire discrète et finie,
L'espérance de cette variable aléatoire est la somme des produits de chaque valeur prise par la variable aléatoire par la probabilité associée.

Calcul des espérances des variables aléatoires des exemples précédents :
Exemple 1 : $E(X) =$

Exemple 2 : $E(X) =$

Interprétation :

Exemple 3 : $E(X) =$

Interprétation :

Remarque : Si on considère une machine à sous, l'espérance de gain pour un joueur est négative, s'il joue un grand nombre de fois son gain moyen sera négatif (i.e. il perd). Cependant l'espérance de gain n'est pas un indicateur intéressant pour le joueur car il ne jouera pas un nombre suffisamment grand de fois pour que l'espérance ait du sens.

En revanche pour le gérant de la machine à sous, l'espérance de gain doit être positive, car la machine à sous va être utilisée un suffisamment grand nombre de fois pour que l'espérance indique réellement le gain moyen.

B. Loi de Bernoulli et simulation d'échantillons

1. Loi de Bernoulli

Définition
On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire qui a deux issues possibles appelées succès et échec, noté S et $\bar{S}$.

Exemple 4 : Lancer une pièce et regarder si elle tombe sur pile ou non est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Tomber sur pile ».

Exemple 5 : Lancer un dé à 6 faces et regarder s'il tombe sur 6 ou pas est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Tomber sur 6 » .

Définition
On appelle **loi de Bernoulli** la loi suivie par la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec dans une épreuve de Bernoulli, et p la probabilité du succès, c'est-à-dire que $P\ (X\ =\ 1)\ =\ p(S)\ =\ p$.
On dit que X suit **la loi de Bernoulli de paramètre p**.
Ainsi la loi de Bernoulli de paramètre p est donnée par le tableau ci-dessous :

Exemple 4 :

Exemple 5:

Propriété
Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors **l'espérance de X** est $E(X) = p$

Démonstration :

2. Simulation d'échantillons d'une loi de Bernoulli

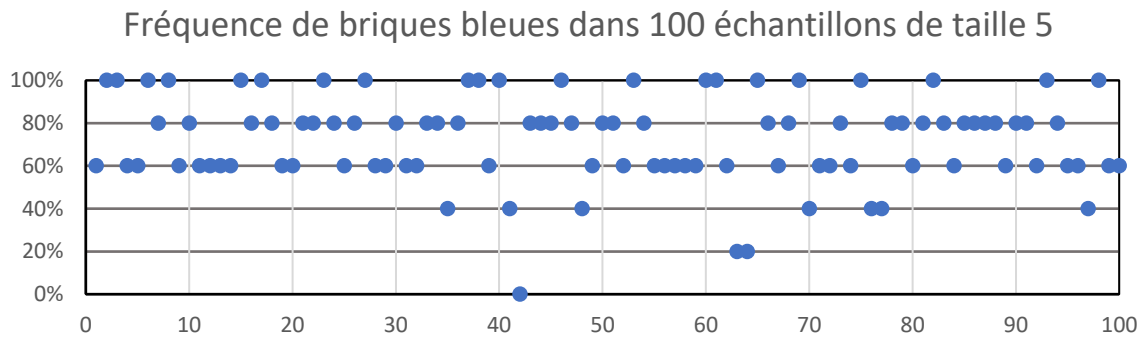
Définition
Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante, une expérience aléatoire à deux issues, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associé à une épreuve de Bernoulli.

Exemple : Dans un sac il y a 1 brique jaune et 3 briques bleues. On prend une brique au hasard dans le sac et on regarde sa couleur.
On répète 5 fois l'expérience en remettant la brique tirée dans le sac à chaque fois.
On obtient un échantillon de taille 5 associé à cette épreuve :

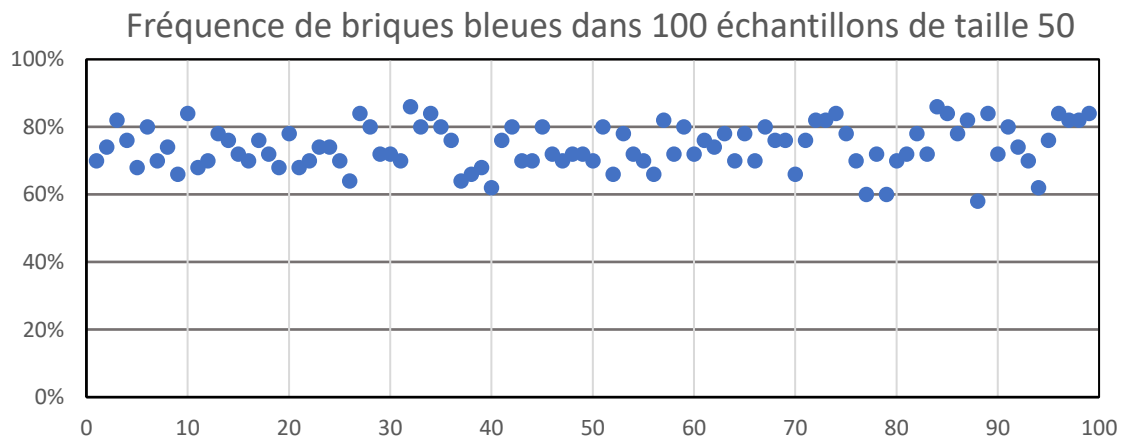
Constat : Si on réalise plusieurs échantillons de taille n, les fréquences observées varie d'un échantillon à un autre.

Définition
On appelle ce phénomène **la fluctuation d'échantillonnage**.

Exemple 1 : La taille de l'échantillon est petite la fluctuation est importante.



Exemple 2 : La taille de l'échantillon est plus grande, la fluctuation est moins importante.



Remarque : On considère une simulation de N échantillons de taille n et on note s l'écart-type de la série de fréquences obtenues et p la proportion théorique.

- En moyenne, environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - s; p + s]$
- En moyenne, environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$
- En moyenne, environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 3s; p + 3s]$

C. Loi binomiale

1. Définition de la loi binomiale

Définition
On répète n fois de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n épreuves.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété :
Si X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p, alors **l'espérance de X** est $E(X) = np$

2. Coefficients binomiaux

Définition
On répète n fois de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Le coefficient binomial, noté $\binom{k}{n}$ (lire k parmi n) est le nombre de branches de l'arbre contenant k succès.

<u>Exemple :</u> On répète 3 fois de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p et on compte le nombre de succès.
On peut représenter la situation par un arbre pondéré :

Calcul des coefficients binomiaux – Triangle de Pascal

Propriété : Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration :

Triangle de Pascal

La première colonne ne contient que des 1 ; pour les autres termes, un terme est égal à la somme du terme immédiatement au-dessus et de celui qui est à la gauche de ce dernier.

Propriété (admise)
Le terme de la ligne n et de la colonne k du triangle de Pascal est égal au coefficient binomial

2. Calcul de la loi binomiale

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout entier k compris entre 0 et n : $P(\{X = k)\} = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$

Démonstration :

Exemple: On lance 5 fois de suite de façon indépendante un dé équilibré à six faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) cinq fois un six ?
   b) au moins une fois un six ?
   c) exactement trois fois un six ?
   d) au moins trois fois un six ?
2. En moyenne sur un grand nombre d'essais, combien obtient-on de six sur cinq lancers ?
3. a. Combien faudrait-il de lancers pour avoir en moyenne sur un grand nombre d'essais 5 six ?
   b. Dans ce cas quelle serait la probabilité d'obtenir cinq fois un six ?