Suites numériques

1 Généralités sur les suites numériques

1.1 Définition et vocabulaire

Définition :

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

Remarque : Autrement dit, une suite est une liste de nombres réels que l'on numérote à l'aide des entiers naturels, le plus souvent à partir de 0 ou 1.

Remarque :
Les suites sont utilisées pour étudier des phénomènes d'évolution discrète.
En mathématique "discret" veut dire qui n'est pas continu.

Exemple :

Vocabulaire et notation :

Les valeurs successives de la suite s'appelle **les termes** de la suite.
$u(1)$ est le **terme d'indice 1** ; $u(n)$ est le **terme d'indice** n ou **terme général** de la suite.
La suite de terme général u(n) est notée (u(n)).

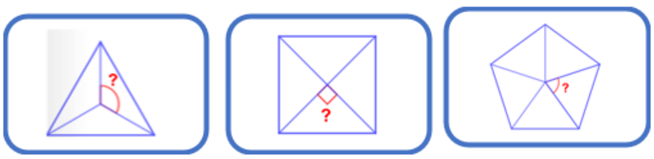
1.2 Exemples de mode de génération d'une suite

Suite définie par l'expression du terme général en fonction de n

Exemple 1 : La suite (u(n)) est définie par $u(n) = n^2 - 2n - 1$.

Calcul des premiers termes :

Exemple 2 : Suite (v(n))donnant la mesure en degré de l'angle au centre d'un polygone régulier en fonction du nombre de côtés.



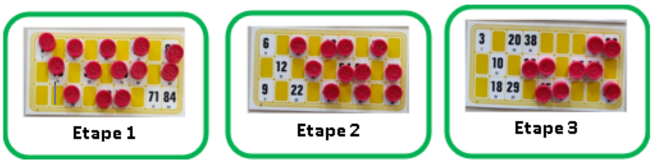
Suite définie par récurrence

Définition : Une suite définie **par récurrence** si on donne :

- le premier terme.
- une formule permettant de passer d'un terme au suivant.

Cette formule est appelée **la relation de récurrence** de la suite.

Exemple 3 : Suite $(u(n))$ donnant le nombre de pions en fonction du numéro de l'étape.



Exemple 4 : Suite $(v(n))$ définie par $v(1) = 2$ et $v(n+1) = v(n) + 2n + 1$.

Calculons les 5 premiers termes :

Remarque : Pour calculer la valeur d'un terme, il faut souvent calculer la valeur de tous les termes précédents.

1.3 Sens de variation

Définition :

- Une suite $(u(n))$ est **croissante** si pour tout n, $u(n+1) > u(n)$
- Une suite $(u(n))$ est **décroissante** si pour tout n, $u(n+1) < u(n)$

Exemple : Suite (v(n)) donnant la mesure en degré de l'angle au centre d'un polygone régulier en fonction du nombre de côtés. (suite de l'exemple 2)

Exemple : Suite $(v(n))$ définie par $v(1) = 2$ et $v(n+1) = v(n) + 2n + 1$. (suite de l'exemple 4)

Exemple : Suite donnant le prix en dollars US du baril de pétrole brut Brent à Londres le premier janvier depuis l'année 2017 (année 0).

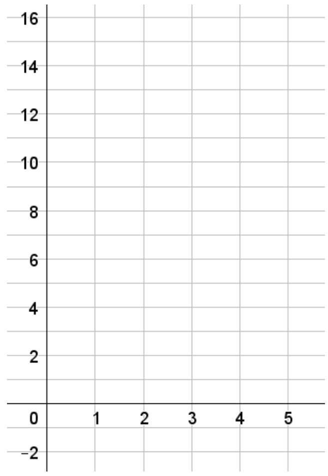
55,4	69,1	59,4	63,6	54,8	86,5
01/2017	01/2018	01/2019	01/2020	01/2021	01/2022

1.4 Représentation graphique d'une suite

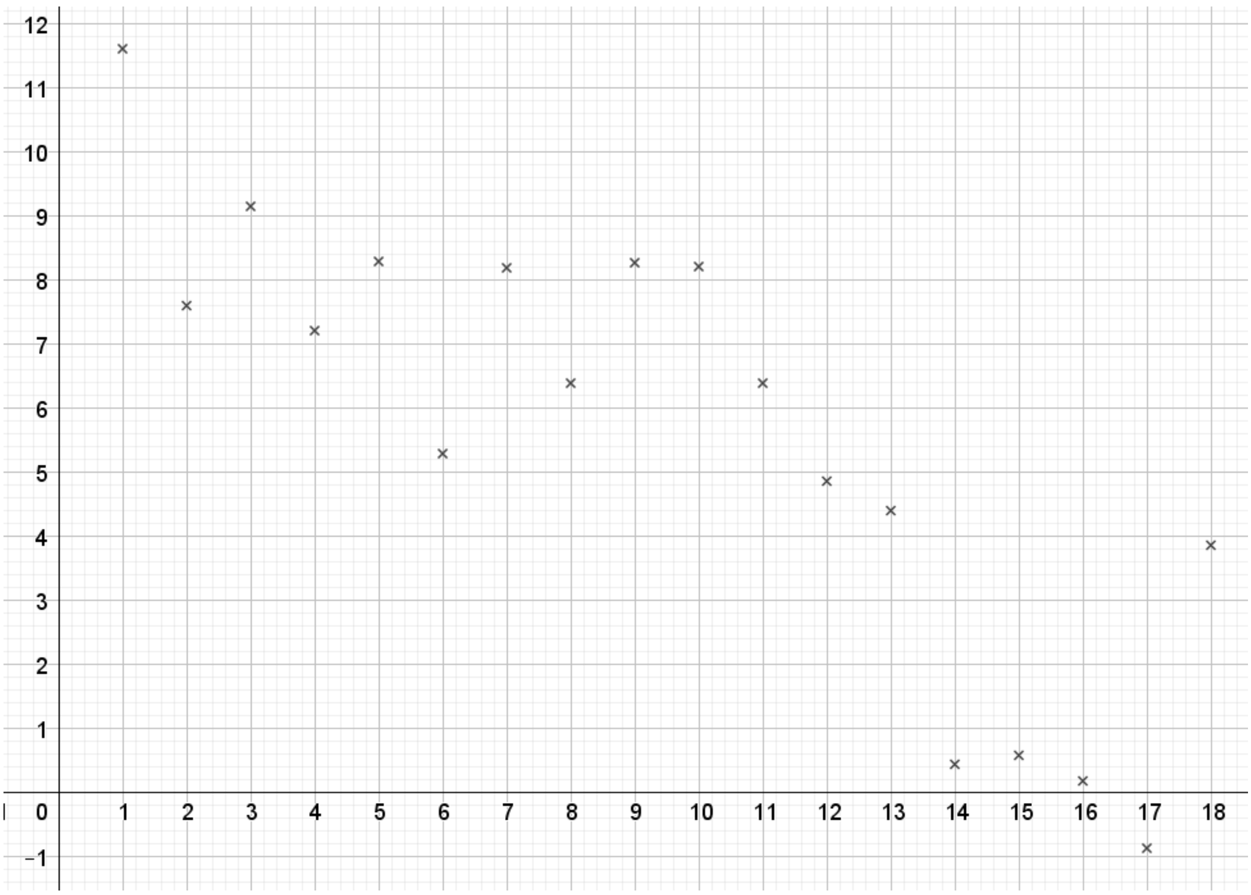
Définition :Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite $(u(n))$ est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u(n))$.

Exemple : La suite de l'exemple 1 : (u(n)) est définie par $u(n) = n^2 - 2n - 1$ à partir de l'indice 0.

n					
$u(n)$					



Exemple : Suite $(u(n))$ donnant la température moyenne en degré Celsius en fonction du numéro du jour dans l'année.
Données ville de Stains - année typique période 2005-2020 - mois de janvier



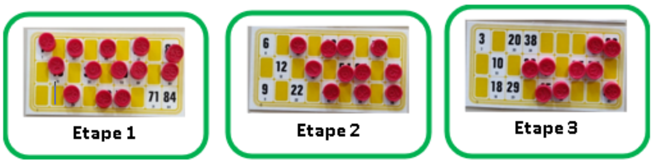
n																		
$u(n)$																		

2 Suite arithmétique

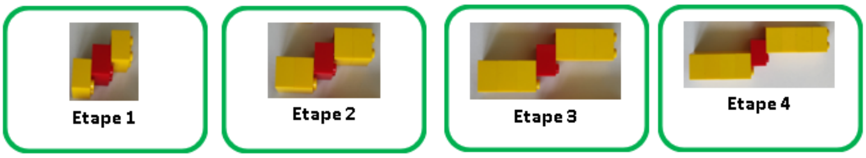
Définition Une suite $((u(n))$ est **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout n $u(n+1) = u(n) + r$.
Le nombre r s'appelle la **raison** de la suite.

Une suite est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant ou en soustrayant un nombre toujours le même.

Exemple : Suite $(u(n))$ donnant le nombre de pions en fonction du numéro de l'étape.



Exemple : Suite $(v(n))$ donnant le nombre de legos en fonction du numéro de l'étape.



Propriété : Soit (u(n)) une suite arithmétique de raison r, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

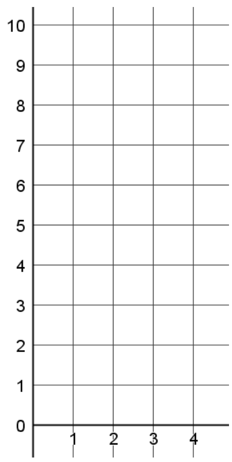
$$u(n) = u(0) + n \times r$$

$$u(n) = u(1) + (n-1) \times r$$

Démonstration :

Propriété : Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés sur une droite de coefficient directeur égal à la raison de la suite.

Exemple :



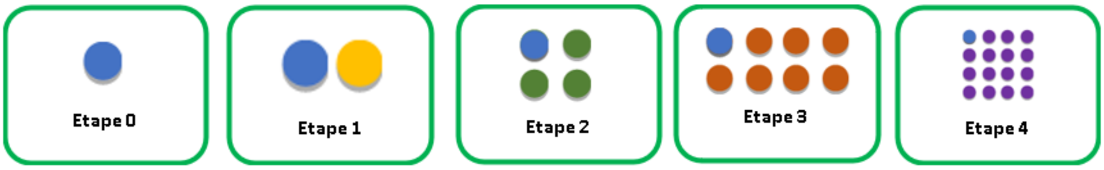
Propriété : Une suite arithmétique de raison r est croissante si r est positif et décroissante si r est négatif.

3 Suite géométrique

Définition Une suite $((u(n))$ est **géométrique** si et seulement si il existe un nombre réel q non nul tel que pour tout n $u(n+1) = u(n) \times q$.
Le nombre q s'appelle la **raison** de la suite.

Une suite est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant ou en divisant par un nombre toujours le même.

Exemple : Suite $(u(n))$ donnant le nombre de ronds en fonction du numéro de l'étape.



Exemple : On place un capital de 10 000€. Ce capital est multiplié par 1,03 chaque année.

Propriété : Soit (u(n)) une suite géométrique de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u(n) = u(0) \times q^n$$

$$u(n) = u(1) \times q^{n-1}$$

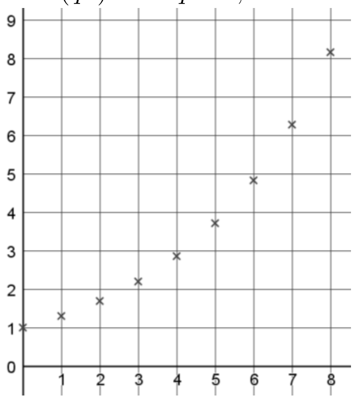
Démonstration :

Propriété : Soit q un nombre réel strictement positif :

- la suite (q^n) est croissante si $q > 1$.
- la suite (q^n) est décroissante si $0 < q < 1$.

Exemples avec représentation graphique :

Suite (q^n) avec $q = 1,3 > 1$



Suite (q^n) avec $q = 0,9$ strictement compris entre 0 et 1.