Notion de fonction

1 Définitions

Définitions et notations :

On définit une **fonction** f sur un ensemble de nombres D en associant à chaque nombre x appartenant à D , un **seul** nombre réel y.

- On dit que f est une fonction de la **variable** x.
- D est appelé **ensemble de définition** de f (on dit que f est définie sur D)

$$\boldsymbol{f : x \mapsto y}$$

x est **un antécédent** de *y* par *f*. *y* est **l'image** de *x* par *f*. On la note $\boldsymbol{f(x)}$. On lit « *f* de *x* ».

Une fonction peut être donnée par un graphique, par un tableau de valeurs, par une formule.

Exemple : On considère la fonction qui a un nombre associe son double.

- Cette fonction est définie pour tous les nombres réels donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$
- Au nombre 5 elle associe 10, donc :
  - 10 est l'image de 5
  - 5 est l'antécédent de 10

2 Expression algébrique

On considère toujours la fonction f qui a un nombre associe son double : $f(x) = 2x$.

Notation : On note $f : x \mapsto 2x$
On lit "f qui a x associe 2x.

Définition Dans notre exemple $2x$ est **l'expression algébrique** de la fonction f.

Attention : Certaines fonctions n'ont pas d'expression algébrique.

3 Tableau de valeurs

Exemple

x	0	1	2	4	5	9
$f(x)$	-9	-8	-5	7	16	72

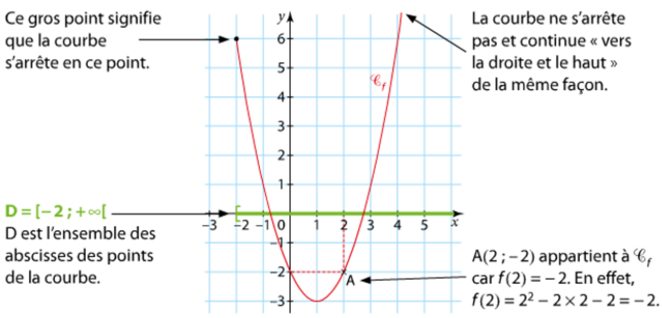
est un tableau de valeurs de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 9$

4 Courbe représentative d'une fonction

Définition : La fonction f est définie sur D. Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative C_f de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que $y = f(x)$ quand x prend toutes les valeurs de D. On dit que C_f a pour équation $y = f(x)$.

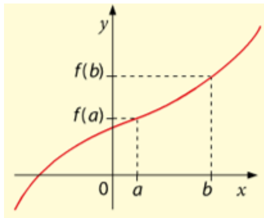
Exemple

C_f représente la fonction f définie sur $D = [-2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2$

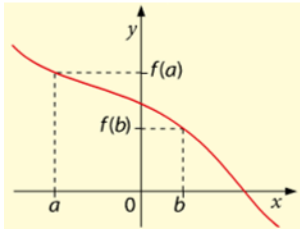


5 Sens de variation - Maximum et minimum

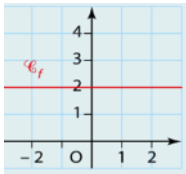
Définition : Une fonction f est strictement **croissante** sur un intervalle I si lorsque x augmente dans I, son image $f(x)$ augmente aussi.
C'est-à-dire pour tout réels a et b de l'intervalle I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.



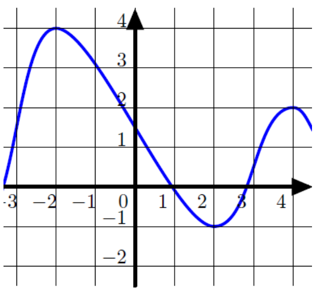
Définition : Une fonction f est strictement **décroissante** sur un intervalle I si lorsque x augmente dans I, son image $f(x)$ diminue.
C'est-à-dire pour tout réels a et b de l'intervalle I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.



Définition : Une fonction f est **constante** sur un intervalle I si pour tout réels a et b de l'intervalle I, $f(a) = f(b)$



Définition : Une fonction f est **monotone** sur un intervalle I si elle croissante, décroissante ou constante sur cet intervalle.



La fonction représentée ci-contre est :

____

____

____

____

Méthode : Etudier le **sens de variation** d'une fonction, c'est repérer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante (voire constante)

On résume son sens de variation dans un **tableau de variation**.

Définition : f atteint son **maximum** en a sur I si pour tout réel x de I, $f(x) < f(a)$.

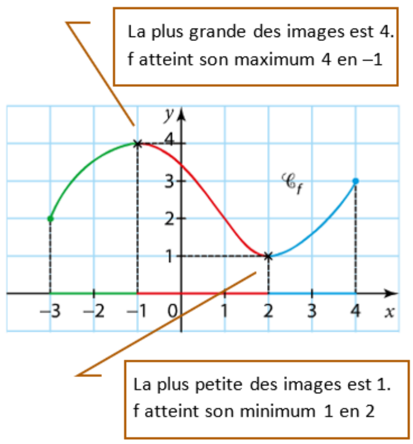
$f(a)$ est la plus grande des images $f(x)$ pour $x \in I$

Définition : f atteint son **minimum** en a sur I si pour tout réel x de I, $f(x) > f(a)$.

$f(a)$ est la plus petite des images $f(x)$ pour $x \in I$

Exemple :

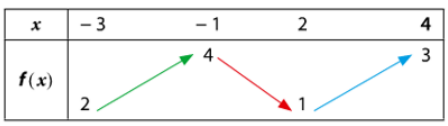
Courbe représentative de f



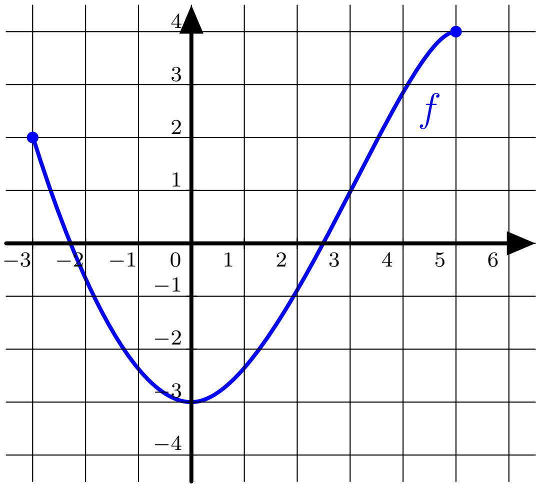
Sens de variation de f sur $[-3; 4]$

- f est strictement croissante sur $[-3; -1]$
- f est strictement décroissante sur $[-1; 2]$
- f est strictement croissante sur $[2; 4]$

Tableau de variation de f



6 Tableau de signes



x	

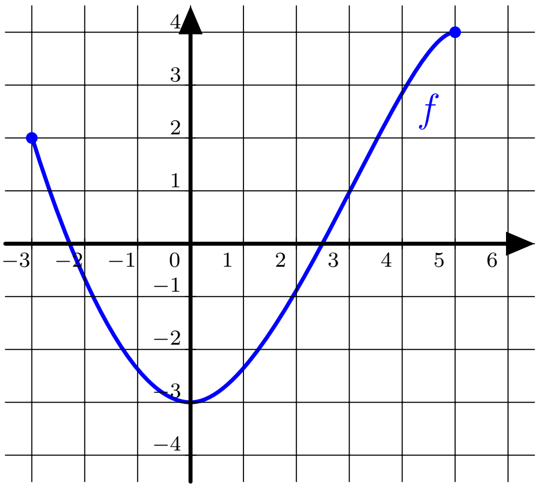
7 Taux de variation entre deux valeurs

Définition : Soit f définie sur D et deux nombres réels x_1 et x_2 appartenant à D.
Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est le nombre :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Remarque : Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est égal au coefficient directeur de la droite passant par les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.

Exemple 1 :



Exemple 2 :Calculer le taux de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$ entre -1 et 3

Propriété : (admise) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Le taux de variation de la fonction f entre x_1 et x_2 est positif pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle I si et seulement si f est croissante sur I.
- Le taux de variation de la fonction f entre x_1 et x_2 est négatif pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle I si et seulement si f est décroissante sur I.